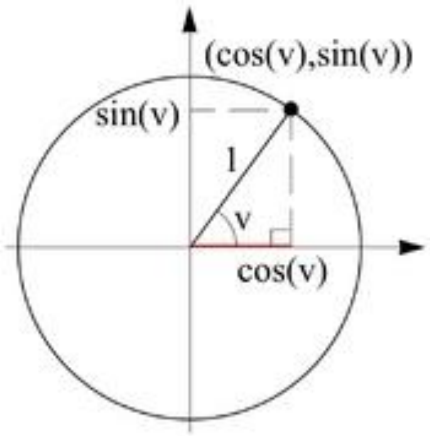
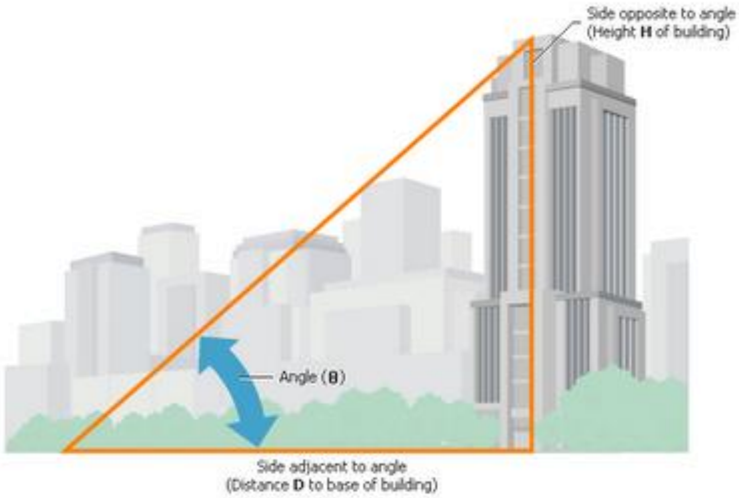
Navn: _______________ Klasse: ____

Matematik Opgave Kompendium

Trigonometri 2

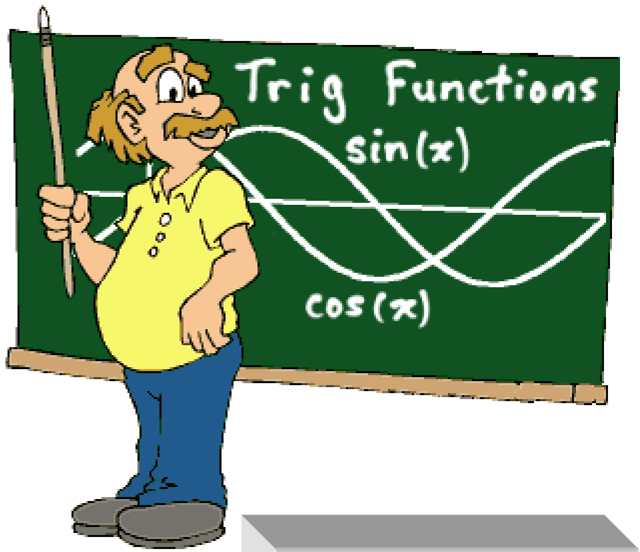




Trigonometri:

Betyder *trigonon = tre vinkler* og *metro = måling*. Dvs. trigonometri handler om trekanter og beregningen af deres vinkler og sider! I dette kompendium vil vi beregne vinkler og sider vha:

- Ligedannede trekanter
- Pythagoras
- Tangens, Sinus & Cosinus
- Sinusrelationen!

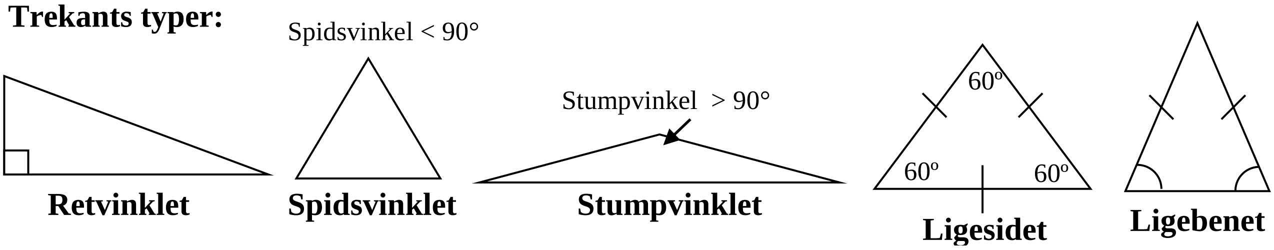


Opgaver: 31

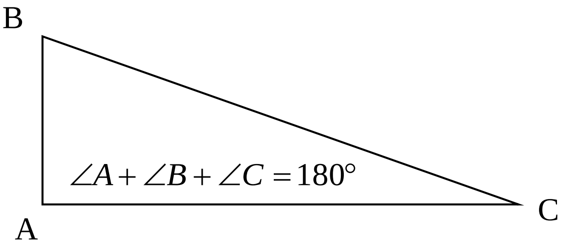
Ekstra: 9

Point: _____

Trekants typer:



Vinkler i Trekanter & Beregning af dem:



En trekant består af 3 kanter og derfor også 3 vinkler!

Hvis man lægger de 3 vinklers grader sammen fås altid 180 º.

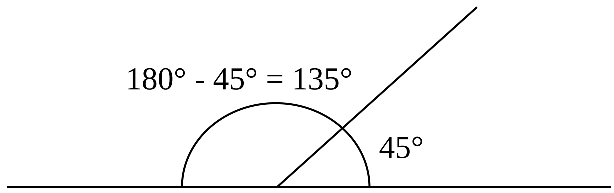
Vinkelsummen = 180º (∠A+∠B+∠C)

Denne viden kan man bruge til, at beregne en manglende vinkel i en trekant hvis man kender 2 af dem!

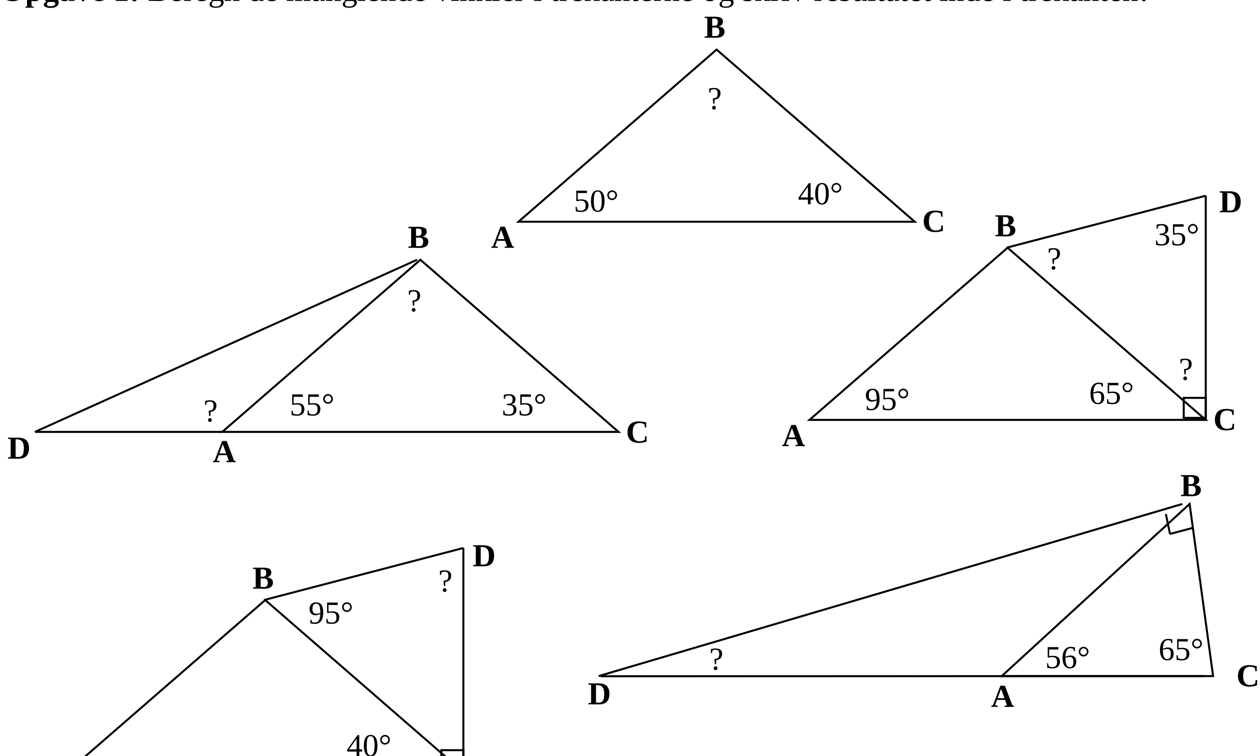
∠A = 180 º - ∠B - ∠C. (∠A kan også skrives ∠**BAC**)

Nabovinkler:

I de tilfælde hvor de to vinkler tilsammen danner 180° eller 360° kan man beregne den ene hvis man kender den anden. Grunden til dette er, at de tilsammen giver 180° el. 360°.



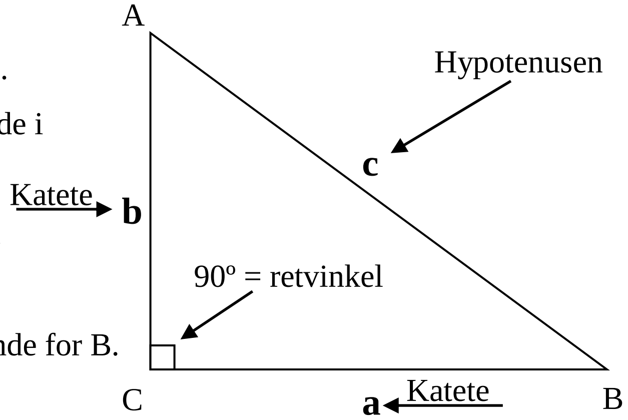
Opgave 1: Beregn de manglende vinkler i trekanterne og skriv resultatet inde i trekanten!



Facit: 10 25 25 35 90 90 110 120 125

Pythahoras formel: $a^2 + b^2 = c^2$

- □ Gælder kun for retvinklede trekanter!
- □ a og b kaldes for **kateter** og danner den rette vinkel.
- □ c kaldes for **hypotenusen** og er altid den længste side i trekanten.
- □ Den kant der er modsat hypotenusen c kaldes for C. (overfor lille c sidder store C)
- □ Den kant der modsat kateten a kaldes A og tilsvarende for B.



Beviset for Pythagoras formel:

Den matematiske verden bygger på beviser som igen danner udgangspunkt for nye beviser. Der findes 367 forskellige beviser for pythagoras formel og en af dem er endda lavet af den amerikanske præsident Garfield. I det følgende tager vi en af klassikerne:

Vi starter med at beregne arealet af det store kvadrat hvis side må være (a+b).

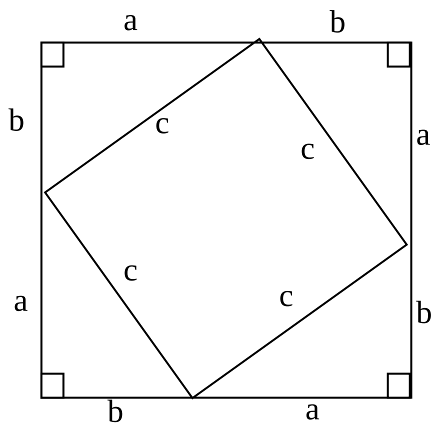
$\text{Areal}_{(\text{metode 1})} = \text{Areal Store kvadrat}$

$\text{Areal}_{(\text{metode 1})} = (a + b) * (a + b)$ altså $(a + b)^2$

$\text{Areal}_{(\text{metode 1})} = a * a + a*b + b*a + b*b$

$\text{Areal}_{(\text{metode 1})} = a^2 + ab + ab + b^2$

$\text{Areal}_{(\text{metode 1})} = a^2 + b^2 + 2ab$



Men arealet kan også beregnes ved at benytte det lille kvadrat i midten og de 4 ens retvinklede trekanter uden om.

$\text{Areal}_{(\text{metode 2})} = \text{Areal Lille kvadrat} + 4 * \text{Areal Trekant}.$

$\text{Areal}_{(\text{metode 2})} = (c * c) + 4 * (½\, a * b)$

$\text{Areal}_{(\text{metode 2})} = c^2 + 2ab$

Vi har nu 2 metoder til at beregne arealet på og de må nødvendigvis give det samme areal:

$\text{Areal}_{(\text{metode 1})} = \text{Areal}_{(\text{metode 2})}$

$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$

$a^2 + b^2 = c^2$

QED = Quod erat demonstrandum

(latin for ”*Hvilket skulle bevises*”) se beviset her =>

http://goo.gl/UZfL3N

Hvordan bruger man formlen:

Hvis man kender a og b som kaldes kateterne kan vi beregne c kaldt hypotenusen på følgende måde:

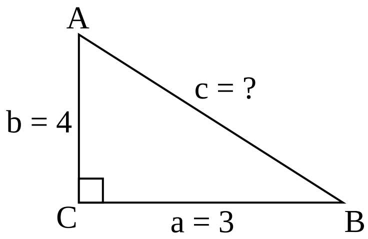
$c^2 = 3^2 + 4^2$

$c^2 = 9 + 16$

$c^2 = 25$

$\sqrt{c^2} = \sqrt{25}$

$c = 5$



http://goo.gl/Fj0rgR

Opgave 2: Brug Pythagoras formel til at beregne hypotenusen i trekanterne.

a) a = 5, b = 12

$c = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{} =$ ______

b) a = 6, b = 8

$c = \sqrt{} = \sqrt{} =$ ______

c) a = 7, b = 24

$c = \sqrt{} = \sqrt{} =$ ______

d) a = 8, b = 15

$c = \sqrt{} = \sqrt{} =$ ______

e) a = 9, b = 12

$c = \sqrt{} = \sqrt{} =$ ______

f) a = 10, b = 24

$c = \sqrt{} = \sqrt{} =$ ______

g) a = 12, b = 16

$c = \sqrt{} = \sqrt{} =$ ______

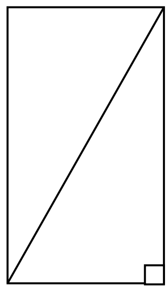
h) a = 20, b = 21

$c = \sqrt{} = \sqrt{} =$ ______

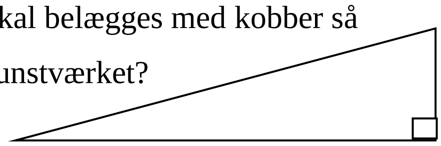
NB: En trekant hvor alle sider er et helt tal som f.eks. 3,4,5 kaldes for en pythagoræisk triplet.

Opgave 3: Løs tekst opgaverne vha. Pythagoras.

En mand anlægger et blomsterbed der har form som et rektangel med bredden 16 m og længden 30 meter. I gennem beddet skal der gå en flisegang der følger den ene diagonal i rektanglet. Beregn længden på flisegangen.



Ekstra Opgave 1: En kunstner vil lave en skulptur der har form som en retvinklet trekant med en grundlinje på 40 meter og en højde på 9 meter. Den sidste side skal belægges med kobber så den skinner i lyset. Hvor mange meter kobber skal bestilles til kunstværket?



Facit: 5 10 13 15 17 19 20 25 26 29 31 34 41 45

At finde den ene katete:

I nogen opgaver er det ikke hypotenusen c man skal finde men derimod en af kateterne. Dette kan kun lade sig gøre hvis man så har den anden katete og hypotenusen. Lad os se på problemet:

$a^2 + b^2 = c^2$ Vi flytter derfor b over på den anden side (ved at trække b^2 fra på begge sider)

$a^2 = c^2 - b^2$

Opgave 4: Beregn den manglende katete

a) a = 12, c = 37

$b = \sqrt{(37^2 - 12^2)} = \sqrt{} = $ ____

b) a = 24, c = 40

$b = \sqrt{} = \sqrt{} = $ ____

c) a = 27, c = 45

$b = \sqrt{} = \sqrt{} = $ ____

d) b = 48, c = 52

$a = \sqrt{} = \sqrt{} = $ ____

e) b = 60, c = 61

$a = \sqrt{} = \sqrt{} = $ ____

f) b = 20, c = 52

$a = \sqrt{} = \sqrt{} = $ ____

Omvendt Pythagoras

I nogle tilfælde kender man længden af alle sider i en trekant men man er i tvivl om hvorvidt det er en retvinklet trekant. Her kan man også bruge Pythagoras formlen til at vise om den er retvinklet eller ej. Dette gøres ved at sætte de to korteste sider i trekanten til a og b mens den længste sættes til c i formlen. Herefter skal man få det samme på begge sider af ligmed tegnet.

Eks: En trekant har siderne 3, 5 og 8 cm. Er trekanten retvinklet?

$3^2 + 5^2 = 8^2$

$9 + 25 = 64$

$34 = 64$

Den er altså ikke retvinklet!

Opgave 5: Afgør om trekanterne er retvinklede og læg tallene sammen udfor falsk og sandt.

Sider i trekant	**Falsk**	**Sandt**	**Sider i trekant**	**Falsk**	**Sandt**
3, 5, 8	15	5	10, 6, 8	12	23
3, 4, 5	8	10	20, 60, 45	22	30
42, 40, 58	16	20	45, 11, 27	10	12
Læg sammen:		(facit)	**Læg sammen:**		(facit)

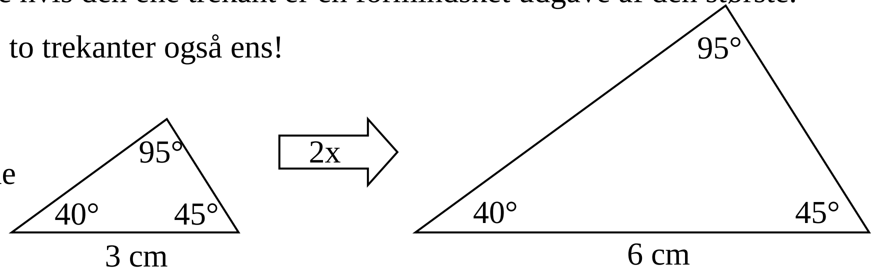
Facit: 11 13 14 20 23 32 35 36 39 45 48 55 58

Ligedannede Trekanter:

To trekanter siges at være ligedannede hvis den ene trekant er en formindsket udgave af den største. Når dette er tilfældet er vinklerne i de to trekanter også ens!

Her ses 2 trekanter som er ligedannede

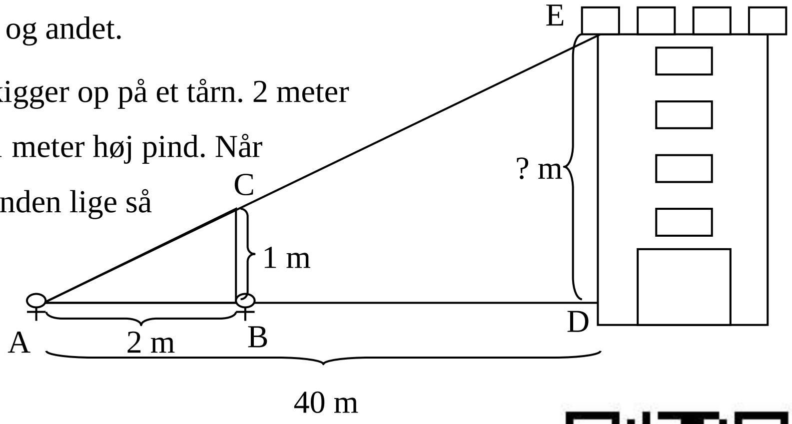
Hvor den ene er forstørret 2 gange!



Ligedannede Trekanter og Højde beregninger:

Hvis man har to ligedannede trekanter, og kender (forstørrelses) forholdet imellem dem, kan man beregne ukendte sider i den ene trekant ud fra den anden. Dette kan man bl.a. bruge hvis man skal beregne højden af f.eks. bygninger, træer og andet.

I eksemplet her står en person ved A og kigger op på et tårn. 2 meter væk ved B står en anden person med en 1 meter høj pind. Når personen ved A kigger op på tårnet ser pinden lige så høj ud som tårnet. Som det ses er der her dannet 2 trekanter ABC og ADE som må være ligedannede.



Forholdet imellem dem må være $\frac{40}{2} = 20$

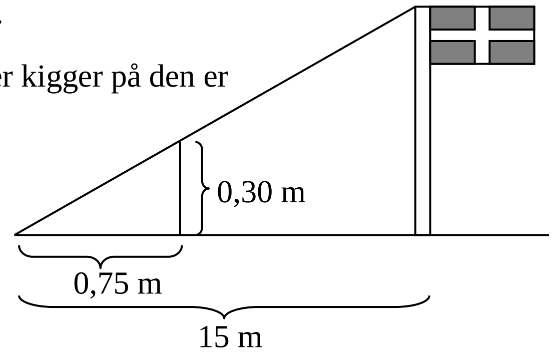
Trekant ADE er altså 20 gange større end ABC og derfor må højden af tårnet |DE| være 20 gange større end |BC| altså pinden. Højden af tårnet er altså

Højde af tårn = |BC| * forhold = 1 m * 20 = 20 meter + højden af personen!

http://goo.gl/3uv6aH

Opgave 6: Løs opgaverne ved at bruge ligedannede trekanter.

a) Beregn højden af flagstangen (se figur) når manden der kigger på den er 2 meter høj. (husk højden på mande!)

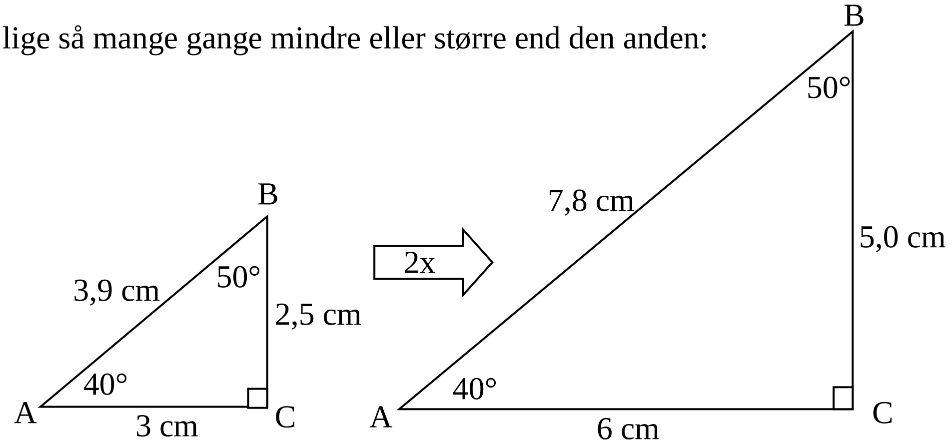


b) Han måler en anden flagstang. Her er afstanden til den i stedet 22,5 m. Hvor høj er denne flagstang?

Facit: 5 8 11 16

Beregning af sider & vinkler vha. ligedannede trekanter.

Ligedannede trekanter kan bruges til at beregne højden af træer, huse og bredden af elve! I det næste skal vi vende blikket mod forholdet mellem trekantens sider! Der sker nemlig det, at hvis man forstørrer trekanten ændres forholdet ikke imellem siderne i 2 ligedannede trekanter. Den ene side er stadig lige så mange gange mindre eller større end den anden:



Den retvinklede trekant bliver forstørret 2 gange men lad os se hvad der sker med forholdet imellem siderne i den lille og stor (forstørrede) trekant:

Lille trekant: $\frac{a}{b}=\frac{2,5}{3,0}=0,83$ $\frac{a}{c}=\frac{2,5}{3,9}=0,64$ $\frac{b}{c}=\frac{3,0}{3,9}=0,77$

Stor trekant: $\frac{a}{b}=\frac{5,0}{6,0}=0,83$ $\frac{a}{c}=\frac{5,0}{7,8}=0,64$ $\frac{b}{c}=\frac{6,0}{7,8}=0,77$

Dvs. at side a, uanset hvor stor trekanten er, vil altid være 0,83 kortere end side b! Side a vil altid være 0,64 kortere end c (hypotenusen) mens side b vil være 0,77 kortere end c (hypotenusen).

Man bør selvfølgelig huske, at disse forhold kun gælder for ligedannede retvinklede trekanter, hvor vinkel A er 40°. Hvis man begynder, at ændre vinkel A vil forholdet imellem siderne ændres!

Dette forhold har mange anvendelses muligheder! Hvis man har en retvinklet trekant, hvor vinklen er 40° og katete b er 4 cm kan man beregne katete a på følgende måde:

a = forhold(a/b) * b = 0,83 * 4 = 3,32 ≈ 3,3 cm

Opgave 7: Beregn katete a i en retvinklet trekant, hvor vinkel A er 40° og katete b er 4 cm! Tegn herefter den retvinklede trekant nedenfor og mål om vinklen nu også bliver 40°!

Facit: 2,8 3,1 3,3

Tabel over forhold i andre retvinklede trekanter:

Det næste skridt er, at undersøge hvad forholdet mellem siderne i andre retvinklede trekanter er (hvor vinkel A ikke er 40°)! Hvis man tegnede 89 forskellige retvinklede trekanter med vinkler fra 1° til 89° og målte forholdet imellem siderne for hver trekant kunne man lave et opslagsværk (se tabel)!

Med dette opslagsværk kunne man så beregne alle manglende sider i en hvilken som helst retvinklet trekant uanset størrelse! Dette hvis blot man kendte en vinkel og en af siderne!

Vinkel A	**a/b**	**a/c**	**b/c**
5°	0,087	0,087	0,996
10°	0,176	0,174	0,985
15°	0,268	0,259	0,966
20°	0,364	0,342	0,940

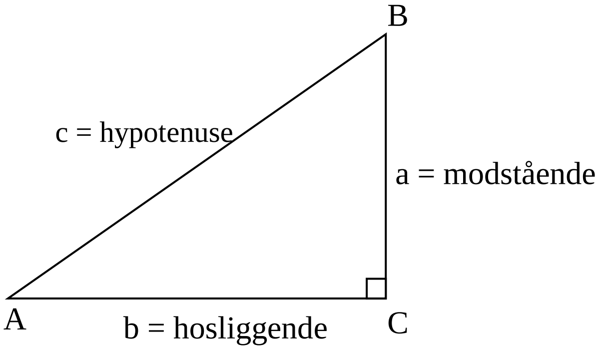
Tangens, Sinus & Cosinus:

De store matematiske opdagelser bliver dog ikke gjort så nemt i de moderne tider! Der er nemlig nogen der er kommet dig i forkøbet og tegnet de 89 trekanter og målt & beregnet. Denne tabel er lagt ind i din lommeregner så du spares for arbejdet! Man har her valgt at navngive de forskellige forhold med ord som lyder mystiske og fremmede men som du nok skal lære mere at kende!

Tangens: tan(vinkel A) = $\frac{a}{b} = \frac{\text{mod}\,stående\_katete}{hosliggende\_katete}$

Sinus: sin(vinkel A) = $\frac{a}{c} = \frac{\text{mod}\,stående\_katete}{hypotenusen}$

Cosinus: cos(vinkel A) = $\frac{a}{c} = \frac{hosliggende\_katete}{hypotenusen}$

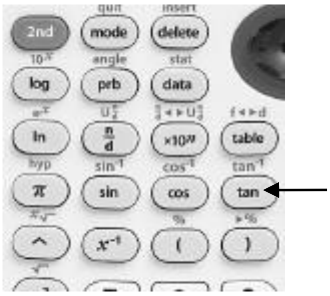


Hvordan bruges de på lommeregneren?

På lommeregneren findes en knap til tan, cos, sin (se billede)

Når man f.eks. trykker på tan kan man indtaste vinklen bagefter:

`tan(40)` husk at lukke parentesen!



Opgave 8: Indtast forskellige vinkler på lommeregneren ved at bruge tan, cos & sin (afrund 3 dec)

NB: Hvis TI-30 leverer et resultat som √3/3 tryk da på beregn knappen < > over enter!

a) tan(20) = ________   d) sin(45) = ________

b) cos(80) = ________   e) tan(56) = ________

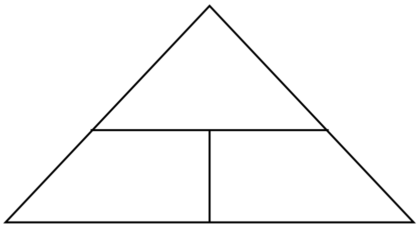
c) sin(42) = ________   f) cos(40) = ________

Facit: 0,17 0,22 0,36 0,67 0,71 0,77 0,99 1,48 2,08

Tangens og regnetrekanten:

Lad os for nemheds skyld lave en regnetrekant til formlen for tangens så de følgende opgaver bliver nemmere:

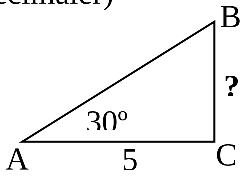
$$\text{Tan (A)} = \frac{\textit{Modstående}}{\textit{Hosliggende}}$$



Opgave 9: Brug tangens til at beregne de manglende kateter (afrund resultat til 2 decimaler)

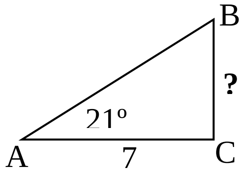
a) Vinkel A = 30º; Hosliggende katete = 5 cm.

Modstående katete = = ________



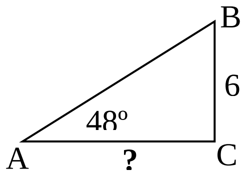
b) Vinkel A = 21º; Hosliggende katete = 7 cm.

Modstående katete = = ________



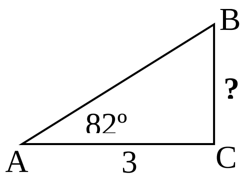
c) Vinkel A = 48º; Modstående katete = 6 cm. (**pas på!**)

Hosliggende katete = = ________



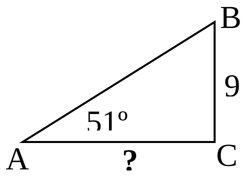
d) Vinkel A = 82º; Hosliggende katete = 3 cm.

Modstående katete = = ________



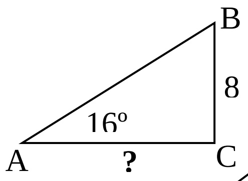
e) Vinkel A = 51º; Modstående katete = 9 cm.

Hosliggende katete = = ________



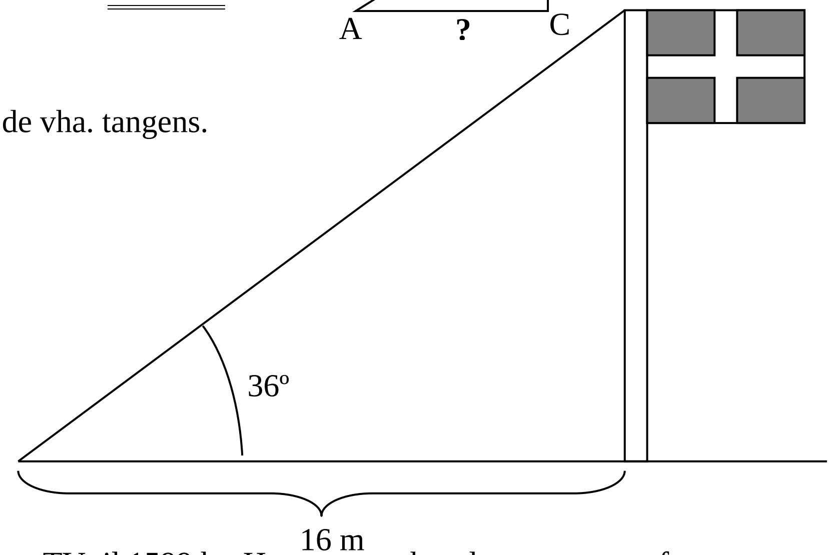
f) Vinkel A = 16º; Modstående katete = 8 cm.

Hosliggende katete = = ________



Opgave 10: Beregn flagstangens højde vha. tangens.

http://goo.gl/l2E2Uc



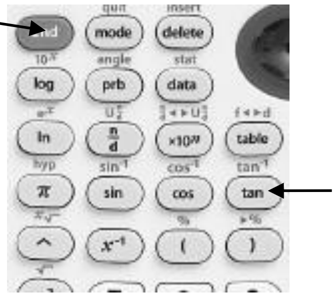
Ekstra Opgave 2: En mand vil købe et TV til 1599 kr. Hvor mange kr udgør momsen af salgsbeløbet?

Facit: 1,08 2,69 2,89 5,40 7,29 11,62 12,83 21,35 27,90 319,8 412,1

Beregning af vinkel A:

Vinklen skulle man tro at man kunne beregne hvis man dividerede den *modstående*- med den *hosliggende katete*. Men denne værdi er ikke vinklen! Grunden er at vinklen har været igennem en tangens funktionen som ændrer vinklen til et andet tal.

Vi skal derimod bruge en anden funktion som kan lave værdien af tangens om til den oprindelige vinkel. Med andre ord skal vi gå den modsatte vej, hvilket indenfor matematik kaldes for **invers**. Denne funktion har tegnet $\tan^{-1}$ og findes på din lommeregner ved at trykke 2nd knappen og tangens knappen.

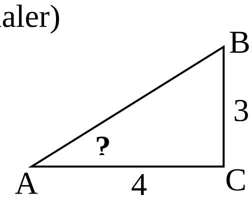


$$\text{Vinkel A} = \tan^{-1}\left(\frac{\textit{modståendekatete}}{\textit{hosliggendekatete}}\right)$$

Opgave 11: Brug invers tangens til at beregne vinkel A (afrund resultat til 2 decimaler)

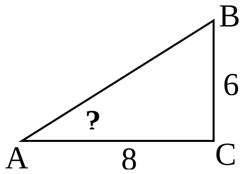
a) Modstående katete = 3 cm; Hosliggende katete = 4 cm.

Vinkel A = $\tan^{-1}$ = ________ º



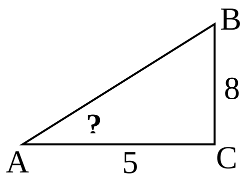
b) Modstående katete = 2 cm; Hosliggende katete = 8 cm.

Vinkel A = $\tan^{-1}$ = ________ º



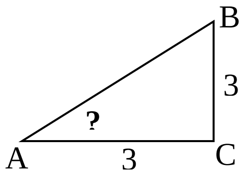
c) Modstående katete = 8 cm; Hosliggende katete = 5 cm.

Vinkel A = $\tan^{-1}$ = ________ º



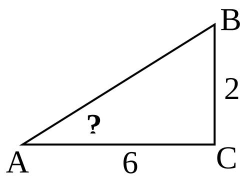
d) Modstående katete = 3 cm; Hosliggende katete = 3 cm.

Vinkel A = $\tan^{-1}$ = ________ º



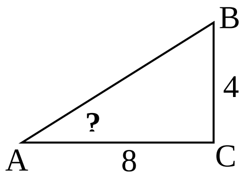
e) Modstående katete = 2 cm; Hosliggende katete = 6 cm.

Vinkel A = $\tan^{-1}$ = ________ º



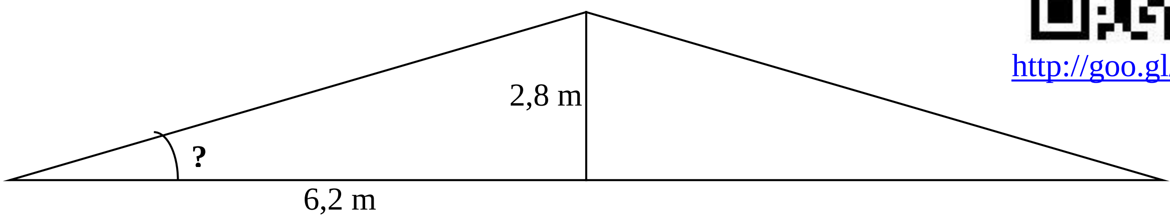
f) Modstående katete = 4 cm; Hosliggende katete = 8 cm.

Vinkel A = $\tan^{-1}$ = ________ º



http://goo.gl/VRaQyK

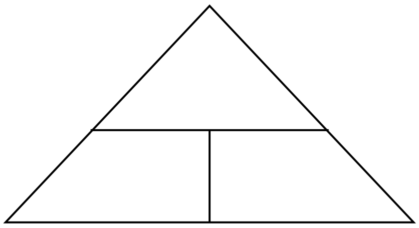
Opgave 12: Beregn tagvinklen ved at bruge invers tangens.



Facit: 14,04 16,89 18,43 24,30 26,57 36,87 41,23 45 57,99

Cosinus og regnetrekanten:

Lad os for nemheds skyld lave en regnetrekant til formlen for cosinus så de følgende opgaver bliver nemmere:

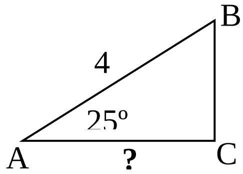


$$\text{Cos}(A) = \frac{\textit{hosliggende}}{\textit{hypotenusen}} = \frac{b}{c}$$

Opgave 13: Brug cosinus til at beregne den hosliggende katete eller hypotenusen (afrund 2 dec.)

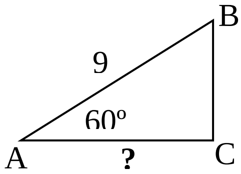
a) Vinkel A = 25º; Hypotenusen = 4 cm.

Hosliggende katete = = ________



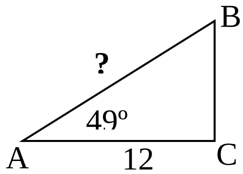
b) Vinkel A = 60º; Hypotenusen = 9 cm.

Hosliggende katete = = ________



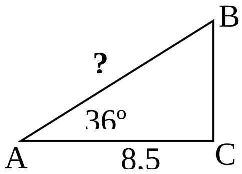
c) Vinkel A = 49º; Hosliggende katete = 12 cm. (**Pas på!)**

Hypotenusen = = ________



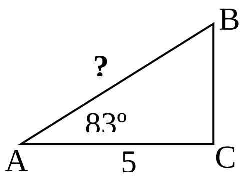
d) Vinkel A = 36º; Hosliggende katete = 8,5 cm.

Hypotenusen = = ________



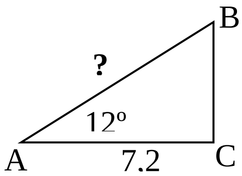
e) Vinkel A = 83 º; Hosliggende katete = 5 cm.

Hypotenusen = = ________

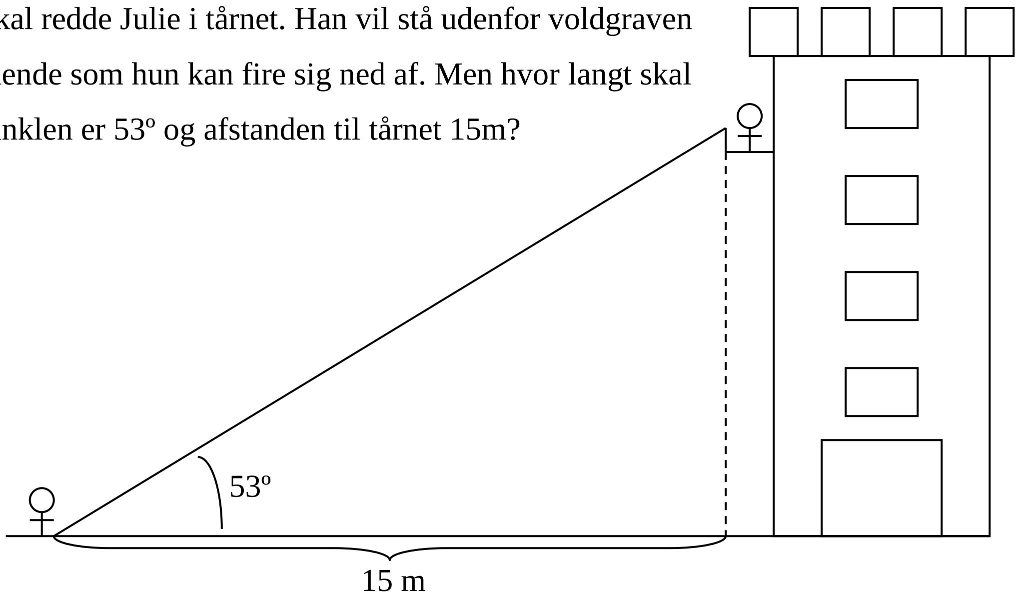


f) Vinkel A = 12º; Hosliggende katete = 7,2 cm.

Hypotenusen = = ________



Opgave 14: Romeo skal redde Julie i tårnet. Han vil stå udenfor voldgraven og kaste et reb op til hende som hun kan fire sig ned af. Men hvor langt skal rebet være når sigte vinklen er 53º og afstanden til tårnet 15m?
(afrund til helt tal)



Facit: 3,63 4,50 7,36 10,51 18,29 21,65 25,00 41,03 51,78

Beregning af vinkel A vha. cosinus:

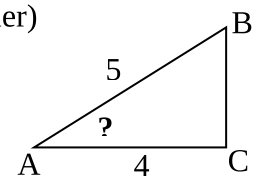
Ligesom med tangens er der ligeledes også en invers cosinus funktion som kan benyttes til at beregne vinkel A. Invers cosinus har tegnet $\cos^{-1}$ som findes på lommeregneren ved at trykke 2nd knappen og cos knappen.

$$\text{Vinkel A} = \cos^{-1}\left(\frac{hosliggende}{hypotenusen}\right)$$

Opgave 15: Brug invers cosinus til at beregne vinkel A (afrund resultat til 2 decimaler)

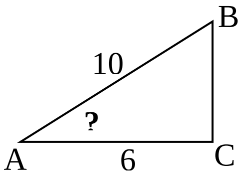
a) Hosliggende katete = 4 cm; Hypotenusen = 5 cm.

Vinkel A = $\cos^{-1}$ = ________ °



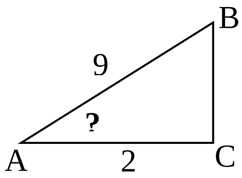
b) Hosliggende katete = 6 cm; Hypotenusen = 10 cm.

Vinkel A = $\cos^{-1}$ = ________ °



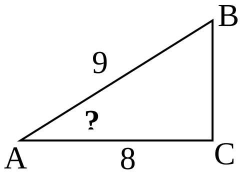
c) Hosliggende katete = 2 cm; Hypotenusen = 9 cm.

Vinkel A = $\cos^{-1}$ = ________ °



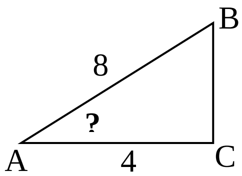
d) Hosliggende katete = 8 cm; Hypotenusen = 9 cm.

Vinkel A = $\cos^{-1}$ = ________ °



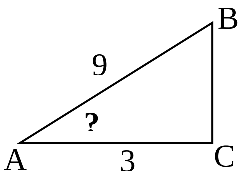
e) Hosliggende katete = 4 cm; Hypotenusen = 8 cm.

Vinkel A = $\cos^{-1}$ = ________ °



f) Hosliggende katete = 3 cm; Hypotenusen = 9 cm.

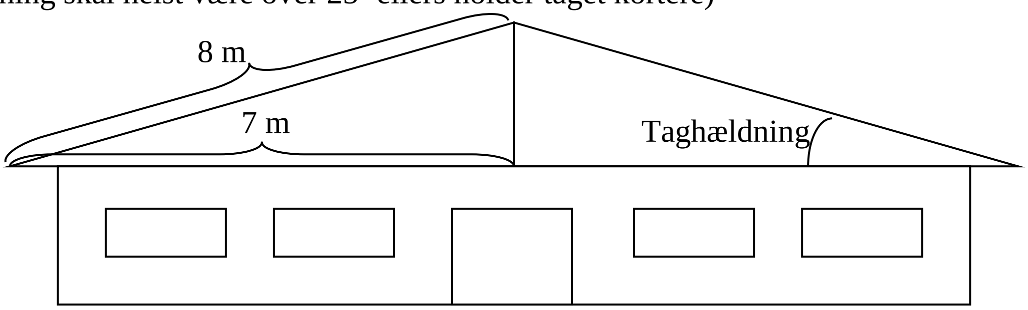
Vinkel A = $\cos^{-1}$ = ________ °



Opgave 16: Claus' kone insisterer på at få et walkin closet i deres nybyggede hus (det har hendes bedste vendinde også). Det koster og derfor er Claus nød til at spare et andet sted og her har han valgt taget. Han har regnet på, at der kan blive råd til det hvis han kun skal købe tagplader til et tag på 8 m i stedet for 11 m. Fidusen er at sænke taghældningen. Beregn den nye taghældning og den gamle? (**NB:** En taghældning skal helst være over 25° ellers holder taget kortere)

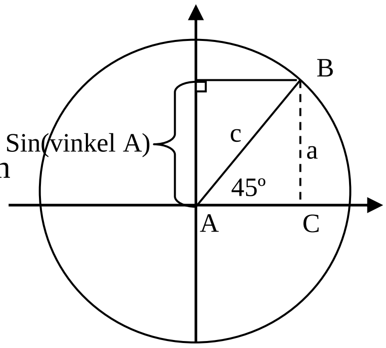
Nye =

Gamle =



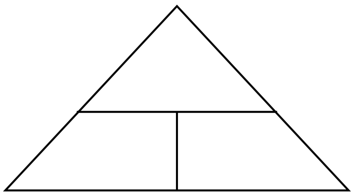
Facit: 27,27 28,96 30,66 36,87 50,48 53,13 60,00 70,53 75,86 77,16

Sinus Funktionen:

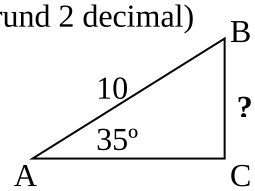


Ved siden af cosinus knappen på din lommeregner findes *sin* knappen. Sin er forkortelse for sinus og benyttes ligesom cosinus til at finde hypotenusen i en retvinklet trekant. Det kan virke lidt fjollet at have 2 funktioner til at beregne det samme – men i modsætning til cosinus benytter sinus den modstående katete frem for den hosliggende. Sinus beregnes ud fra:

$$\text{Sinus (Vinkel A)} = \frac{\text{mod}\,\textit{ståendekatete}}{\textit{hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

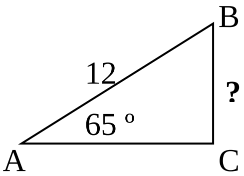


Opgave 17: Brug sinus til at beregne den modstående katete eller hypotenusen (afrund 2 decimal)



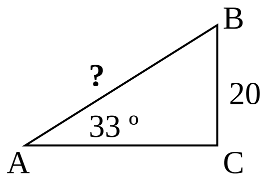
a) Vinkel A = 35º; Hypotenusen = 10 cm.

modstående katete = = ________



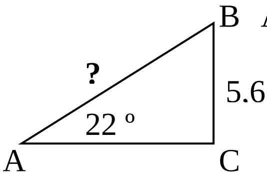
b) Vinkel A = 65º; Hypotenusen = 12 cm.

modstående katete = = ________



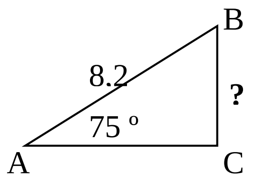
c) Vinkel A = 33º; modstående katete = 20 cm. (**Pas på!**)

Hypotenusen = = ________



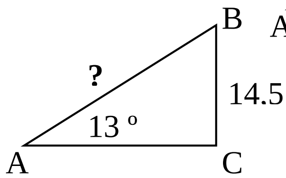
d) Vinkel A = 22º; modstående katete = 5,6 cm.

Hypotenusen = = ________



e) Vinkel A = 75 º; Hypotenusen = 8,2 cm.

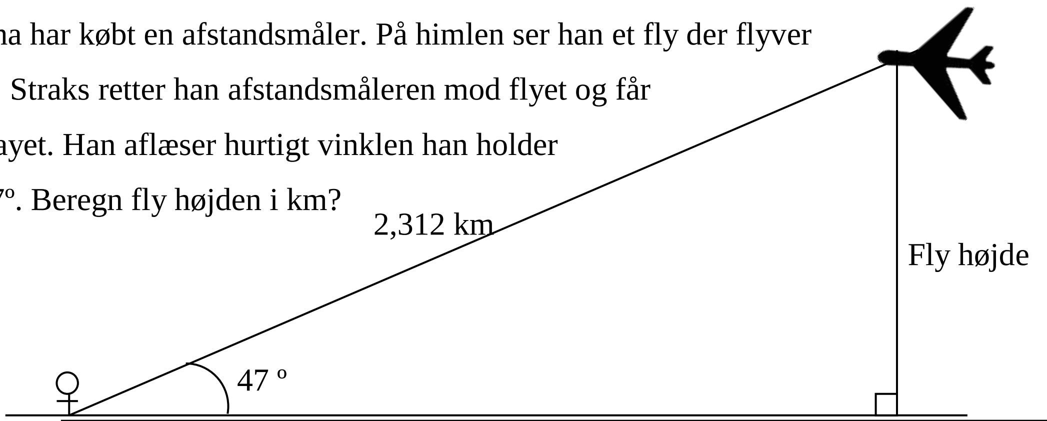
modstående katete = = ________



f) Vinkel A = 13º; modstående katete = 14,5 cm.

Hypotenusen = = ________

Opgave 18: Mischa har købt en afstandsmåler. På himlen ser han et fly der flyver lavt hen over ham. Straks retter han afstandsmåleren mod flyet og får 2,312 km på displayet. Han aflæser hurtigt vinklen han holder måleren med til 47º. Beregn fly højden i km?



Facit: 1,69 2,85 5,74 7,92 10,88 13,23 14,95 36,72 64,46 85,24

Beregning af vinkel A vha. sinus:

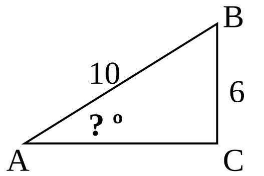
Ligesom med de to foregående funktioner findes ligeledes en invers sinus funktion som kan benyttes til at beregne vinkel A. Invers sinus har tegnet $\sin^{-1}$ som findes på lommeregneren ved at trykke 2nd og sin knappen.

$$\text{Vinkel A} = \sin^{-1}\left(\frac{\text{mod}\,\textit{stående}}{\textit{hypotenusen}}\right)$$

Opgave 19: Brug invers sinus til at beregne vinkel A (afrund til 2 decimaler)

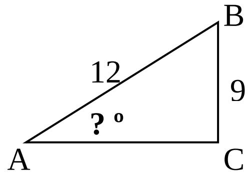
a) Modstående katete = 6 cm; Hypotenusen = 10 cm.

Vinkel A = = ________ º



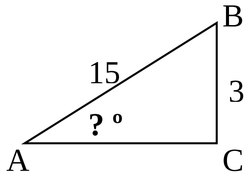
b) Modstående katete = 9 cm; Hypotenusen = 12 cm.

Vinkel A = = ________ º



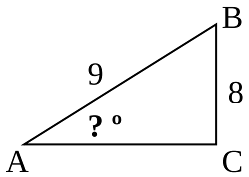
c) Modstående katete = 3 cm; Hypotenusen = 15 cm.

Vinkel A = = ________ º



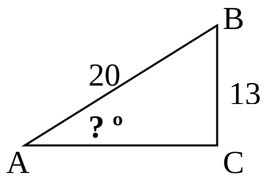
d) Modstående katete = 8 cm; Hypotenusen = 9 cm.

Vinkel A = = ________ º



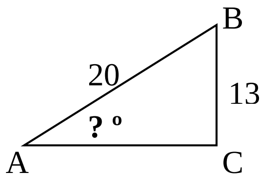
e) Modstående katete = 13 cm; Hypotenusen = 20 cm.

Vinkel A = = ________ º

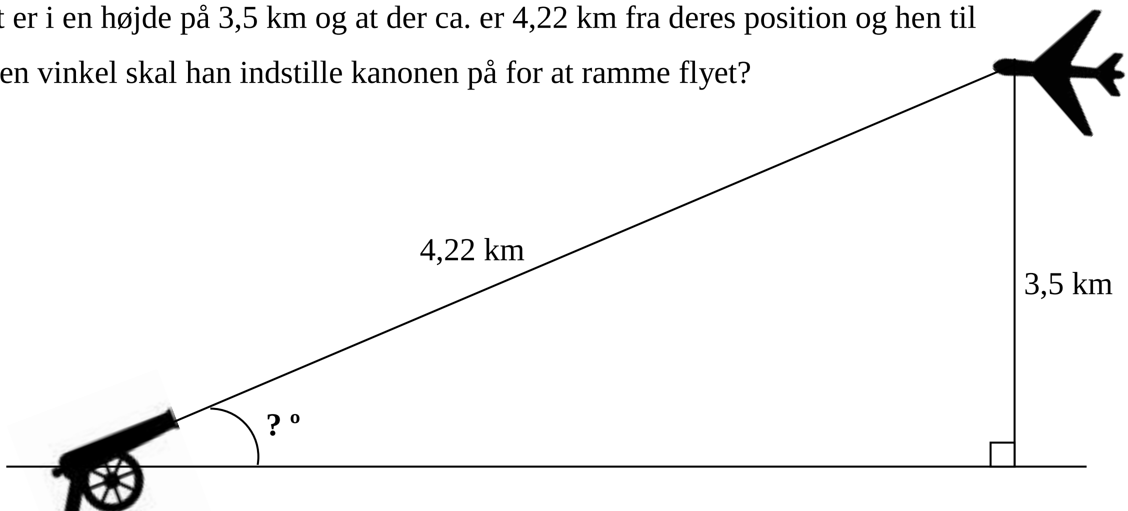


f) Modstående katete = 4 cm; Hypotenusen = 5 cm.

Vinkel A = = ________ º



Opgave 20: Jens er rekrut i flyvevåbnet og skal lære at skyde fly ned. Fra radar tjenesten får han at vide at flyet er i en højde på 3,5 km og at der ca. er 4,22 km fra deres position og hen til flyet. Hvilken vinkel skal han indstille kanonen på for at ramme flyet?

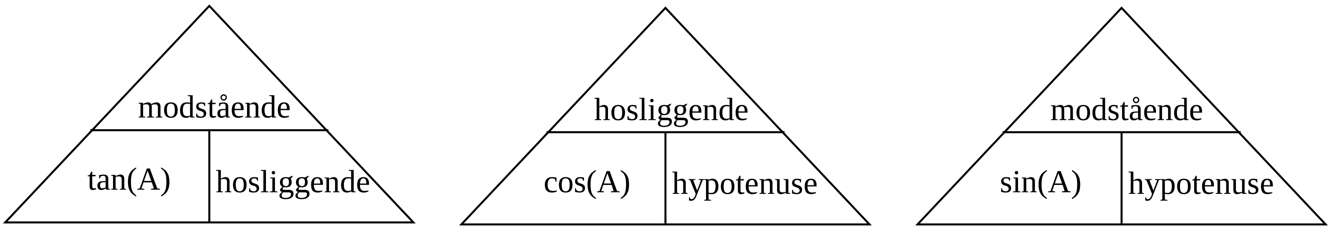


Facit: 11,54 36,87 39,27 40,54 48,59 53,13 56,04 61,09 62,73 69,72

Det svære valg (tan, cos, sin):

Den virkelige verden er desværre ikke så enkel som på de sidste 10 sider! Nu har vi nemlig 3 formler men hvilken skal man vælge når man får en opgave, hvor man ikke bliver fortalt hvilken en man skal bruge. For at kunne træffe det rigtige valg er man nød til at se hvilke 2 størrelser om den retvinklede trekant som er kendt og hvilken størrelse skal findes.

http://goo.gl/K8qpma



Herefter vælger man den formel hvor alle 3 størrelser indgår.

Opgave 21: Brug de 3 formler til at finde den manglende størrelse (afrund til 2 decimaler)

a) modstående = 6; vinkel = 62 º
hosliggende = = ______

b) modstående = 12; vinkel = 32 º
hypotenusen = = ______

c) hosliggende = 3; vinkel = 22 º
modstående = = ______

d) hosliggende = 3; hypotenusen = 6
Vinkel = = ______

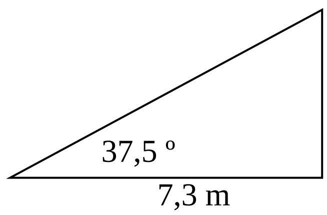
e) vinkel = 85 º; hypotenusen = 13
modstående = = ______

f) vinkel = 35 º; hosliggende = 23
modstående = = ______

g) modstående = 9; hypotenusen = 14,5
Vinkel = = ______

h) modstående = 2; hosliggende = 9,2
Vinkel = = ______

Opgave 22: Løs tekstopgaverne vha. tangens, cosinus, sinus (afrund til 2 decimaler).
En telefonpæl kaster en skygge på 7,3 meter. Hvor lang er telefonpælen, når solen står 37,5 º over horisonten?

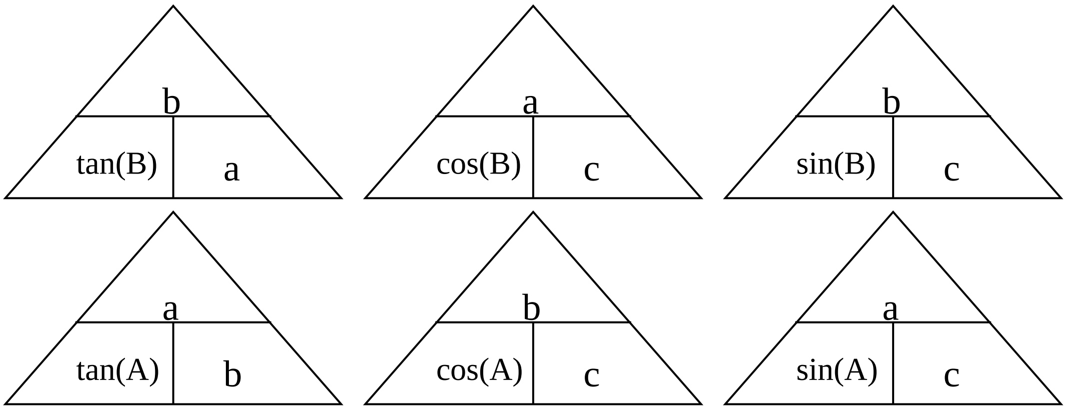


Ekstra Opgave 3: En af snorene, der holder fast i det øverste af en teltstang til et telt, er 3,1 meter lang. Hvor højt er teltet, når vinklen mellem snoren og jorden er 30 º? (tegn en skitse)

Facit: 1,21 1,55 3,19 5,60 8,06 9,20 12,26 12,95 16,10 22,64 27,49 38,37 60,00 67,68

Vinkel B:

Indtil videre har vi helt glemt at der i trekanten også er en vinkel B som også kan beregnes vha. de 3 funktioner. Egentlig gælder der de samme regnetrekanter som på forrige side for vinkel B (blot hvor A er udskiftet med B). Men i det følgende er de sat op med a, b og c.

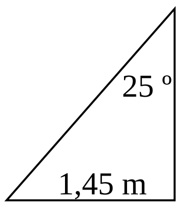


Opgave 23: Udfyld tabellen – husk at vinkelsummen er 180 º, og at Pythagoras også kan bruges (afrund til 1 decimal.)

a	b	c	Vinkel A	Vinkel B	Vinkel C
15				35 º	90 º
7		18			90 º
	19		42 º		90 º
	16			57,5 º	90 º
11			72 º		90 º
5	9				90 º

Opgave 24: Løs tekstopgaverne vha. tangens, cosinus, sinus (afrund til 1 decimal).

En stige, der står op ad en lodret mur danner en vinkel på 25 º med muren. Stigens fod er 1,45 meter fra muren. Hvor lang er stigen? – og hvor højt op ad muren når stigen?



Ekstra Opgave 4: Kurt er en dag ude at lege med sin drage, der er forsynet med en 75 meter lang line. Det blæser ret kraftigt, og linen, der er rullet helt ud, holdes helt stram. Hvor højt er dragen oppe over jorden, når linen danner en vinkel med jordoverfladen på 50 º?

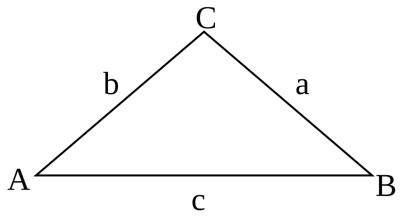
Facit: 3,1 3,4 3,6 5,2 10,2 10,3 10,5 11,6 16,6 17,1 18 18,3 19,0 22,9 25,6 29,1 32,5 36,7 48 55 57,5 60,9 67,1 73,2

Sinusrelationen & vilkårlige trekanter:

Indtil videre har det hele kun handlet om retvinklede trekanter. Men verden består af meget andet end retvinklede trekanter – og her kan man ikke bruge formlerne på de forrige sider til noget. Dog findes der også en formel som gælder for helt tilfældige trekanter som ikke nødvendigvis er retvinklede. Denne formel gør brug af sinus funktionen som vi allerede har lært at kende så godt:

http://goo.gl/KsAMOL

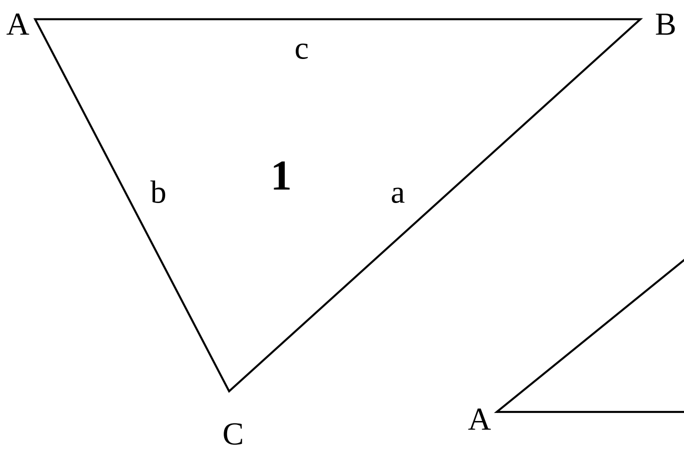
$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

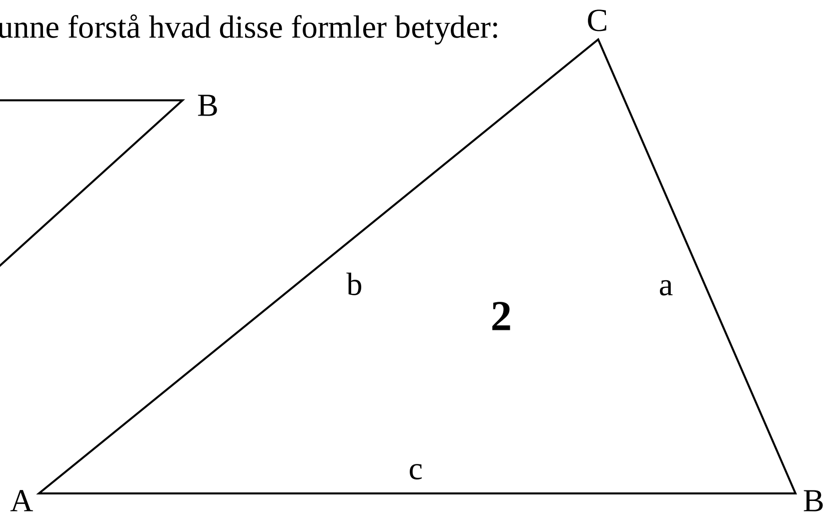


Det ser lidt kompliceret ud så lad os splitte formlen op i mindre dele som måske er nemmere at forstå. Formlen kan nemlig opdeles i 3 dele:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \qquad \frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)} \qquad \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Lad os tage et eksempel for bedre at kunne forstå hvad disse formler betyder:





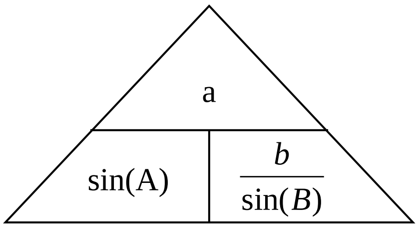
Opgave 25: Mål sider og vinkler, divider ens sider og vinkler – Er forholdene de samme?

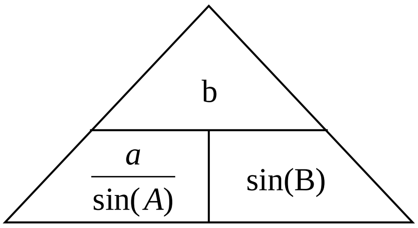
trekant	**a**	**b**	**c**	**A**	**B**	**C**	$\frac{a}{\sin A}$	$\frac{b}{\sin B}$	$\frac{c}{\sin C}$	**Ens (ja/nej)**
1										
2										

Side a og b's formel:

Normalt benyttes regnetrekanten når der er 3 størrelser/variable. Men i dette tilfælde har vi 4 variable a, b, sin(A) og sin(B). Det gør at trekanten kommer til at se anderledes ud og at der i stedet for en trekant er to trekanter man skal vælge imellem.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$$





Men hvilken trekant skal man bruge? Hvis man skal finde siden a skal man vælge den første trekant fordi denne trekant har a i et felt for sig selv. Dvs. at hvis man skal finde side b kan man ikke bruge den første trekant fordi b ikke står i et felt for sig selv!

Vær opmærksom på at:

- felterne $\frac{b}{\sin(B)}$ i første trekant og $\frac{a}{\sin(A)}$ i anden trekant skal altid skal regnes først.
- Når man beregner vinkel A eller B skal man huske at man skal benytte invers sinus ($\sin^{-1}$)

Opgave 26: Find den manglende vinkel eller side i trekanten.(afrund til 1 decimaler)

a) b = 5, ∠ A = 30 º og ∠ B = 50 º

$a = \sin(A) * \frac{b}{\sin(B)} =$ $\qquad$ = ____

b) a = 6, ∠ A = 25 º og ∠ B = 65 º

$b = \sin(B) * \frac{a}{\sin(A)} =$ $\qquad$ = ____

c) a = 3, b = 9 og ∠ B = 45 º

$\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{a}{\left(\frac{b}{\sin(B)}\right)}\right) =$ $\qquad$ = ____

d) a = 5, b = 6 og ∠ A = 21 º

$\angle B = \sin^{-1}\left(\frac{b}{\left(\frac{a}{\sin(A)}\right)}\right) =$ $\qquad$ = ____

e) a = 12, ∠ A = 10 º og ∠ B = 80 º

b = $\qquad$ = ____

f) a = 11, b = 9 og ∠ A = 55 º

∠ B = $\qquad$ = ____

g) a = 3, b = 6 og ∠ B = 85 º

∠ A = $\qquad$ = ____

h) b = 8, ∠ A = 32 º og ∠ B = 75 º

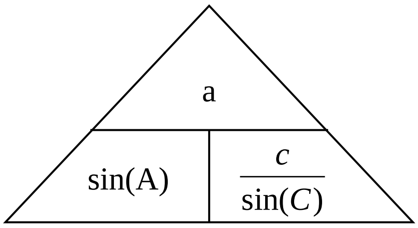
a = $\qquad$ = ____

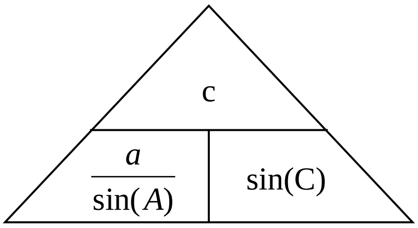
Facit: 3,3 4,4 9,2 12,9 13,6 18,2 25,5 29,9 42,1 68,1 75,2

Side a og c's formel:

Man kan stille tilsvarende regnetrekanter op for formlen for siderne a og c.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$





Alternativet til at benytte disse lidt underlige regnetrekanter er, at omforme formlen ved brug af regnereglerne fra ligninger. Lad os se på hvordan man kan finde siden a:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

(brøkstreg bliver til gange når sin(A) flyttes)

$$a = \frac{c}{\sin(C)} * \sin(A)$$

Som man kan se så får man den samme formel som hvis man havde brugt regnetrekanten blot vendt om. Men faktorernes orden er ligegyldigt så der står det samme.

Ekstra Opgave 5: Find den manglende vinkel eller side i trekanten.(afrund til 1 decimaler)

a) c = 2, ∠ A = 58 º og ∠ C = 46 º

a = = _____

b) a = 7, c = 9 og ∠ C = 53 º

∠ A = = _____

c) a = 4,5; ∠ A = 102 º og ∠ C = 45 º

c = = _____

d) a = 10, c = 3 og ∠ A = 61 º

∠ C = = _____

e) a = 13, ∠ A = 100 º og ∠ C = 45 º

c = = _____

f) a = 6, c = 16 og ∠ C = 92 º

∠ A = = _____

g) a = 5, c = 5 og ∠ A = 60 º

∠ C = = _____

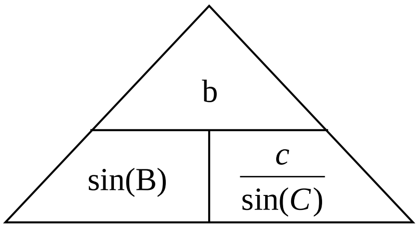
h) c = 10, ∠ A = 26 º og ∠ C = 96 º

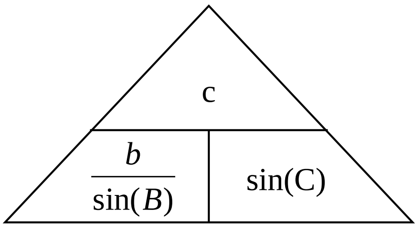
a = = _____

Facit: 0,5 2,4 3,3 4,4 7,6 9,3 15,2 22,0 28,3 38,4 60,0

Side b og c's formel:

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$





Det har sikkert undret hvorfor ∠ A, B og C er sværere at beregne end siderne. Lad os se på hvordan man vha. ligninger kan udlede formlen for at beregne sin(C)

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$ (brøkstreg bliver til gange når sin(A) flyttes)

$$b = \frac{c}{\sin(C)} * \sin(B)$$ (vi flytter sin(C) over på den anden side)

b * sin(C) = c * sin(B) (vi flytter b over på den anden side)

$$\sin(C) = \frac{c * \sin(B)}{b}$$

Denne formel ligner bestemt ikke den som fremkommer hvis vi bruger regnetrekanten – men de er ens! Grunden er, at når man dividere 2 brøker med hinanden ganges med den omvendte:

$$\text{Sin(C)} = \frac{c}{\left(\frac{b}{\sin(B)}\right)} = \frac{c}{1} : \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{1} * \frac{\sin(B)}{b} = \frac{c * \sin(B)}{b} \qquad \text{dvs. } \angle C = \sin^{-1}\left(\frac{c * \sin(B)}{b}\right)$$

Ekstra Opgave 6: Find den manglende vinkel eller side i trekanten.(afrund til 1 decimaler)

a) b = 5, ∠ B = 30 º og ∠ C = 70 º

c = = ______

b) b = 2, c = 4 og ∠ C = 23 º

∠ B = = ______

c) c = 6; ∠ C = 120 og ∠ B = 30 º

b = = ______

d) b = 21, c = 7 og ∠ B = 55 º

∠ C = = ______

e) b = 9, ∠ B = 40 º og ∠ C = 80 º

c = = ______

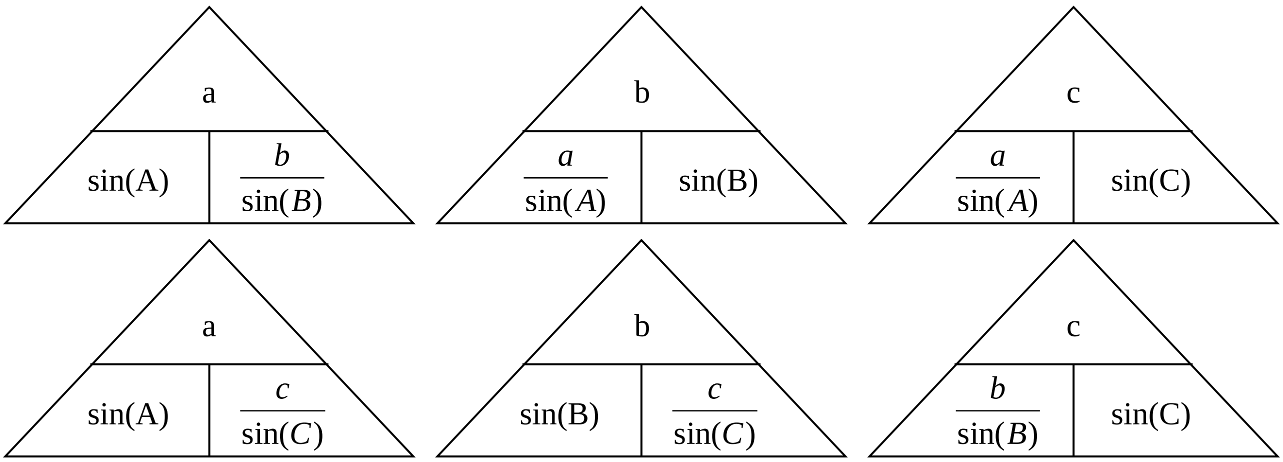
f) b = 10, c = 10 og ∠ C = 32 º

∠ B = = ______

Facit: 3,5 5,5 9,4 11,3 13,8 15,8 21,3 32,0 41,3

Alle 3 formler i aktion:

I det følgende skal man vælge den trekant der indeholder den variabel man ønsker at finde, og de 3 variable man kender.



Opgave 27: Find den manglende vinkel eller side i trekanten.(afrund til 1 decimaler)

a) b = 8, ∠ A = 25 º og ∠ B = 75 º

a = = ____

b) b = 7, c = 5; og ∠ C = 28 º

∠ B = = ____

c) a = 19, c = 18; og ∠ A = 66 º

∠ C = = ____

d) b = 12, ∠ B = 11 º; og ∠ C = 38 º

c = = ____

e) a = 3, b = 4; og ∠ B = 50 º

∠ A = = ____

f) a = 8, ∠ A = 67 º og ∠ B = 39 º

b = = ____

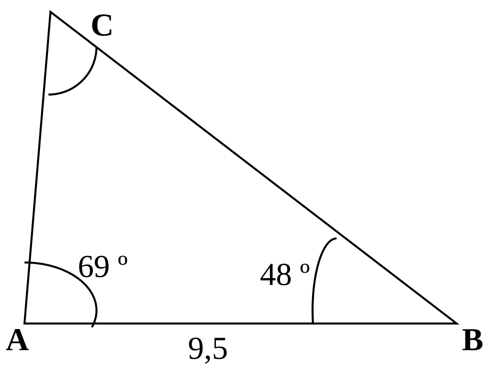
Opgave 28: Bestem ∠ C og siderne a og b i trekanten (afrund til 1 decimal)

Hint: vinkelsum 180 º

∠ C =

a =

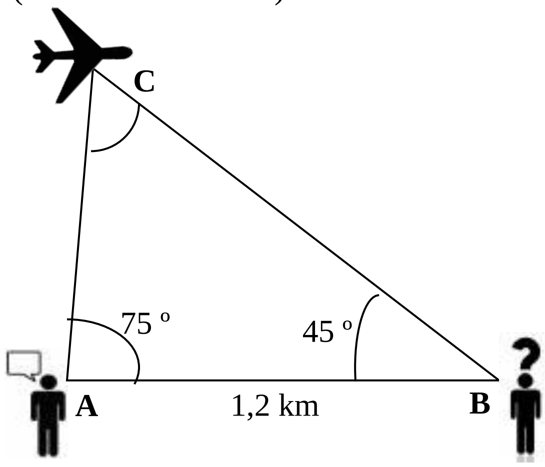
b=



Ekstra Opgave 7: En mand sætter 5000 kr i banken til en rente på 2,5 % pa. Hvor mange penge står der på kontoen efter 10 år?

Facit: 1,2 3,5 5,5 6,2 7,9 10,0 35,1 38,7 41,1 59,9 63 65,8 6400,4 7125,8

Opgave 29: Casper (A) og Frank (B) står med en afstand på 1,2 km imellem hinanden og ser på det samme fly. Beregn afstanden imellem hver af dem og flyet? (afrund til 1 decimal)

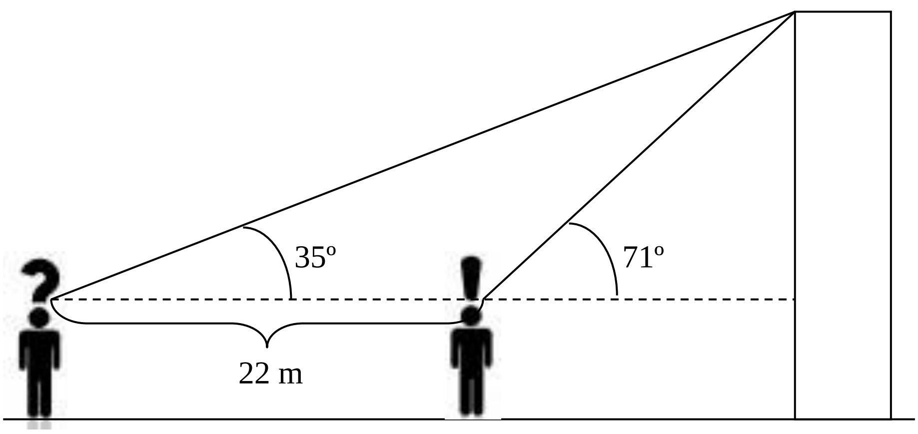


Casper =

Frank =

Opgave 30: Bestemme flyvehøjden (afrund til 2 decimaler). **Hint:** retvinklettrekant & sinus

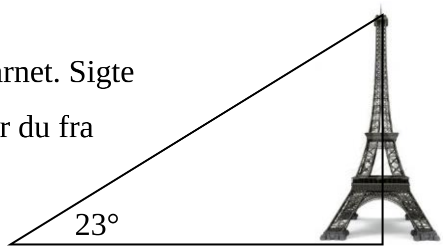
Ekstra Opgave 8: 2 mænd står med 22 m mellemrum og sigter mod toppen af et tårn. De måler sigtevinklerne med en sekstant. Beregn højden af tårnet (**Hint:** nabovinkler)



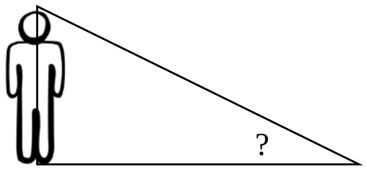
Facit: 0,57 0,92 0,95 1,0 1,3 1,75 18,6 20,3 21,5 29,5 35,4 39,45 100 224

Opgave 31: Løs repetitions opgaverne.

a) Du står i Paris foran Eiffel tårnet og sigter mod toppen af tårnet. Sigte vinklen er 23 ° og tårnet er 317,3 meter højt. Hvor langt står du fra tårnet? (afrund til helt antal meter)



b) En mand på 1,85 meter kaster en skygge på 80 cm. Hvor mange grader står solen over horisonten når skyggen er så lang? (afrund til helt antal grader)



Ekstra Opgave 9:

a) Knippelsbros ene klap er 30 meter lang. Når broen går op løftes klappen op i en vinkel på 75° i forhold til dens normale position. Hvor langt op i luften hæves det yderste af klappen. (afrund til helt antal meter). Tegn evt. situationen.

b) En stige er sat op af en mur så stigen danner en vinkel på 25° med muren!!! Stigen står 145 cm fra muren. Beregn hvor højt op af muren stigen står samt hvor lang stigen er? (afrund til helt antal cm) Husk 2 spørgsmål!!

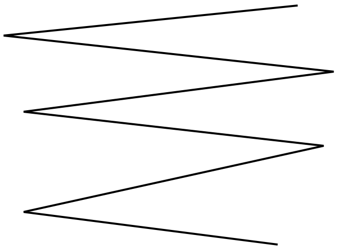
Facit: 29 57 67 311 343 748

Mundtlig matematik: Bjergvejen

Stegastein udsigtspunkt i Norge ligger 650 meter oppe over fjorden!

Du er blevet sat til at designe en ny vej op til udsigtspunktet! Da bjerget jo er 650 meter højt kan man ikke anlægge en lige vej op til bjerget da vejen da vil komme til at skråne for meget! Der skal derfor anlægges en såkaldt serpentinevej! (se billede)

Vejen vil så komme til at følge et zig zag mønster



Verdens meste stejle vej hælder med 19 grader derfor skal den som bliver anlagt nok have en mindre hældning!

Spørgsmål: *Design den nye vej så den fører helt op til toppen hvor stigningen hele vejen op er nogenlunde jævn!*