

Navn: _____ Klasse: _____

Matematik Opgave Kompendium

Statistik



Følgende gennemgås

- Gennemsnit/Middelværdien
- Mindste- & Størsteværdi & Variationsbredden
- Medianen
- Hyppigheden
- Frekvensen
- Summeret Hyppighed & Frekvens
- Grupperede Observationer
- Histogram, Stolpe & Pindediagrammer
- Cirkeldiagrammer
- Aflæsning af Diagrammer
- Manipulation med Statistik
- Statistiske Undersøgelser
- Symmetrier (Normalfordelingen)
- Boksplot
- Statistik & Udvikling (Lineær Regression)

Opgaver: 27

Ekstra: 7

Point: _____

Statistik:

Statik handler om hvordan man bearbejder og analyserer og præsenterer data iform af tal. I matematik og ikke mindst samfundet er statistik et vigtigt redskab og benyttes ofte indenfor journalistik, virksomheder, og ikke mindst indenfor politik. Specielt indenfor politik er det blevet normalt at kaste om sig med tal, analyser og grafer. Netop derfor er det *uhyre vigtigt for borgerne i et demokratisk samfund at de er ved noget om statistik* da politikere ofte benytter det som et redskab til at fremme deres politik og udlægning af virkeligheden (altså manipulation). Statistik er tal og som sådan objektive men analysen af tallene og tolkningen af graferne afhænger af øjnene der ser og er altså med andre ord subjektiv!

Indenfor statistik findes en masse begreber som skal læres for at kunne arbejde med tallene. I det følgende vil vi se på de grundlæggende begreber.

Observationer:

De tal som indsamles og udgør det statistiske datamateriale kalder man for observationer.

Observationerne behøver ikke alle at være forskellige! Lad os se på et eksempel. Nedenfor ses en tabel over 25 elevers alder i en 1g klasse. Hver af deres aldre er en observation men som man kan se så er der flere af observationerne som er ens!

Adam	15	Emilie	17	Juliane	18	Mikkel	16	Nikolaj	16
Amanda	16	Frederik	16	Lars	15	Mischa	16	Patricia	15
Artemis	17	Hans	18	Mads	16	Monika	16	Peter	16
Christian	16	Helen	16	Marie	17	Natascha	15	Tobias	17
Dan	17	Jonathan	17	Mathias	15	Niki	17	Tora	19

Gennemsnit / Middelværdien:

Når man beregner gennemsnittet lægger man alle observationer sammen og dividerer med antallet af observationer!

$$\text{Gennemsnit} = \frac{\text{Alle_observationer_lagt_sammen}}{\text{antal_observationer}}$$

$$\text{Gennemsnit} = \frac{15 + 16 + 17 + 16 + 17 + 17 + 16 + 18 + 16 + 17 + 18 + 15 + 16 + 17 + 15 + 16 + 16 + 16 + 15 + 17 + 16 + 15 + 16 + 17 + 19}{25}$$

$$\text{Gennemsnit} = \frac{409}{25} = 16,36$$

Opgave 1: Beregn gennemsnittet

- a) Beregn gennemsnittet af klassens skostørrelser?

Adam	45	Emilie	38	Juliane	37	Mikkel	44	Nikolaj	44
Amanda	38	Frederik	45	Lars	46	Mischa	42	Patricia	37
Artemis	44	Hans	40	Mads	45	Monika	38	Peter	42
Christian	42	Helen	40	Marie	41	Natascha	36	Tobias	44
Dan	43	Jonathan	43	Mathias	39	Niki	44	Tora	38

Gennemsnit =

- b) Beregn gennemsnittet af klassens fraværs timer?

Adam	2	Emilie	8	Juliane	30	Mikkel	0	Nikolaj	5
Amanda	0	Frederik	0	Lars	8	Mischa	8	Patricia	2
Artemis	10	Hans	12	Mads	2	Monika	45	Peter	10
Christian	22	Helen	15	Marie	9	Natascha	10	Tobias	16
Dan	8	Jonathan	6	Mathias	7	Niki	18	Tora	6

Gennemsnit =

- c) Beregn gennemsnittet af sendte sms'er i klassen?

Adam	2	Emilie	20	Juliane	30	Mikkel	8	Nikolaj	3
Amanda	10	Frederik	15	Lars	18	Mischa	12	Patricia	16
Artemis	6	Hans	20	Mads	10	Monika	4	Peter	8
Christian	2	Helen	25	Marie	28	Natascha	35	Tobias	22
Dan	8	Jonathan	6	Mathias	8	Niki	12	Tora	12

Gennemsnit =

- d) Beregn gennemsnittet af klassens matematik prøve?

Adam	4	Emilie	7	Juliane	12	Mikkel	10	Nikolaj	7
Amanda	02	Frederik	4	Lars	7	Mischa	7	Patricia	4
Artemis	12	Hans	7	Mads	10	Monika	7	Peter	10
Christian	10	Helen	4	Marie	4	Natascha	12	Tobias	4
Dan	7	Jonathan	10	Mathias	02	Niki	10	Tora	7

Gennemsnit =

- e) Beregn gennemsnittet af klassens højder?

Adam	185	Emilie	168	Juliane	158	Mikkel	188	Nikolaj	182
Amanda	170	Frederik	186	Lars	180	Mischa	190	Patricia	170
Artemis	165	Hans	175	Mads	185	Monika	175	Peter	185
Christian	175	Helen	155	Marie	165	Natascha	175	Tobias	195
Dan	190	Jonathan	195	Mathias	178	Niki	180	Tora	170

Gennemsnit =

Facit: 6,8 7,2 8,2 8,32 10,36 11,82 12,81 13,60 13,72 40,8 41,4 42,8 168,6 171,8 177,6

Typetallet:

Typetallet er den observation der forekommer flest gange - dvs. det typiske tal!

Hvis vi ser på eksemplet med klassens alder:

15 16 17 16 17 17 16 18 16 17 18 15 16 17 15 16 16 16 15 17 16 15 16 17 19

Så vil man se at den observation der er flest af er 16 år. Derfor er typetallet 16.

Opgave 2: Find typetallet i klassens data (der tages udgangspunkt i data fra forrige side!)

- a) Find typetallet af klassens skostørrelser?

45 38 44 42 43 38 45 40 40 43 37 46 45 41 39 44 42 38 36 44 44 37 42 44 38

Typetal = _____

- b) Find typetallet af klassens fraværs timer?

2 0 10 22 8 8 0 12 15 6 30 8 2 9 7 0 8 45 10 18 5 2 10 16 6

Typetal = _____

- c) Find typetallet af sendte sms'er i klassen?

2 10 6 2 8 20 15 20 25 6 30 18 10 28 8 8 12 4 35 12 3 16 8 22 12

Typetal = _____

- d) Find typetallet af klassens matematik prøve?

4 2 12 10 7 7 4 7 4 10 12 7 10 4 2 10 7 7 12 10 7 4 10 4 7

Typetal = _____

- e) Find typetallet af klassens højder?

185 170 165 175 190 168 186 175 155 195 158 180 185 165 178 188 190 175 175 180 182
170 185 195 170

Typetal = _____

NB: Der kan i et datasæt være flere typetal hvis der ikke er en der er flest af. I excel vil den da angive den mindste observation som typetallet!

Facit: 6 7 8 8 10 42 44 175 185

Mindste- og Størsteværdien:

Mindsteværdien er den mindste observation mens størsteværdien er den største værdi!

I vores eksempel med klassens alder

15 16 17 16 17 17 16 18 16 17 18 15 16 17 15 16 16 16 15 17 16 15 16 17 19

Bliver mindsteværdien 15 og størsteværdien 19.

NB: mange tror at mindsteværdien er den observation der forekommer færrest gange i datasættet - men dette er forkert!

Opgave 3: Find mindste og størsteværdien i klassens data!

- a) Find mindste- & størsteværdien af klassens skostørrelser?

45 38 44 42 43 38 45 40 40 43 37 46 45 41 39 44 42 38 36 44 44 37 42 44 38

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

- b) Find mindste- & størsteværdien af klassens fraværs timer?

2 0 10 22 8 8 0 12 15 6 30 8 2 9 7 0 8 45 10 18 5 2 10 16 6

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

- c) Find mindste- & størsteværdien af sendte sms'er i klassen?

2 10 6 2 8 20 15 20 25 6 30 18 10 28 8 8 12 4 35 12 3 16 8 22 12

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

- d) Find mindste- & størsteværdien af klassens matematik prøve?

4 2 12 10 7 7 4 7 4 10 12 7 10 4 2 10 7 7 12 10 7 4 10 4 7

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

- e) Find mindste- & størsteværdien af klassens højder?

185 170 165 175 190 168 186 175 155 195 158 180 185 165 178 188 190 175 175 180 182
170 185 195 170

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

Facit: -1 0 2 2 3 10 12 32 35 36 41 45 46 50 145 155 185 195

Variationsbredden:

Variationsbredden er forskellen imellem den største- og mindsteværdi

$$\text{Variationsbredden} = \text{Størsteværdi} - \text{Mindsteværdi}$$

I vores eksempel med klassens alder bliver variationsbredden da $(19-15)$ 4!

Opgave 4: Find variationsbredden i klassens data!

- a) Find variationsbredden af klassens skostørrelser?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b) Find variationsbredden af klassens fraværs timer?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\hspace{2cm}}$$

- c) Find variationsbredden af sendte sms'er i klassen?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\hspace{2cm}}$$

- d) Find variationsbredden af klassens matematik prøve?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\hspace{2cm}}$$

- e) Find variationsbredden af klassens højder?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\hspace{2cm}}$$

Opgave 5: Beregn variationsbredde i årets dagtemperaturer i henholdsvis København & Moskva

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
Kbh	2,0	2,2	4,9	9,6	15,0	18,7	19,8	20,0	16,4	12,1	7,0	3,7
Moskva	-7,0	-5,0	1,0	9,0	18,0	20,0	21,0	20,0	12,0	8,0	0,0	-5,0

København Variationsbredde i temperatur: ____

Moskva Variationsbredde i temperatur: _____

NB: København og Moskva ligger på samme breddegrad men vi bemærker at de har væsentlig forskelligt klima! Moskva har fastlandsklima mens Kbh har kystlandsklima!

Facit: 8 10 10 14 18 21 28 33 37 40 45 48

Medianen:

Når man skal finde medianen skal man først stille alle observationerne på række efter størrelse fra mindst til størst! Den observation der står i midten kaldes for medianen!

15 15 15 15 15 16 16 16 16 16 16 16 **16** 16 16 17 17 17 17 17 17 17 18 18 19

Dvs. i eksemplet med klassens alder er medianen 16 som står på plads nr 13 i rækken!

Opgave 6: Find medianen i klassens data.

- a) Find medianen af klassens skostørrelser? (**NB:** start med at stille tallene på række!)

45 38 44 42 43 38 45 40 40 43 37 46 45 41 39 44 42 38 36 44 44 37 42 44 38

Medianen = _____

- b) Find medianen af klassens fraværs timer?

2 0 10 22 8 8 0 12 15 6 30 8 2 9 7 0 8 45 10 18 5 2 10 16 6

Medianen = _____

- c) Find medianen af sendte sms'er i klassen?

2 10 6 2 8 20 15 20 25 6 30 18 10 28 8 8 12 4 35 12 3 16 8 22 12

Medianen = _____

- d) Find medianen af klassens matematik prøve?

4 2 12 10 7 7 4 7 4 10 12 7 10 4 2 10 7 7 12 10 7 4 10 4 7

Medianen = _____

- e) Find medianen af klassens højder?

185 170 165 175 190 168 186 175 155 195 158 180 185 165 178 188 190 175 175 180 182 170 185 195 170

Medianen = _____

Facit: 5 7 8 11 12 18 42 45 165 178 185

Medianen i lige talsæt:

I forrige opgave har vi set på medianen i et observationssæt på 25 observationer. Dvs. at den observation der står på plads nr 13 står lige i midten. I ulige observationssæt vil det derfor altid være nemt at finde medianen. Men hvad hvis der kun er et lige antal f.eks. 24 observationer? Her står 2 observationer i midten nemlig nr 12 og 13. *I folkeskolen vælger man altid det tal der står til venstre for medianen* altså observation nr 12. Andre steder beregnes et gennemsnit imellem 12 og 13!

Lad os tag eksemplet med højderne i klassen og fjern en af de højeste - så er der ligepludselig 24!

155 158 165 165 168 170 170 170 175 175 175 **175 178** 180 180 182 185 185 185 186 188 190 190 195

Her ser vi at medianen må være 175 for den står til venstre for midten. Hvis man vælger gennemsnittet fås medianen til 176,5!

Opgave 7: I en prøve er der givet følgende karakterer

12 7 10 7 10 10 12 7 7 12 10 02 10 7

Beregn følgende statistik variable på klassens karakterer

- a) Gennemsnit/Middelværdi = _____ = _____ (afrund til 2 decimal)
- b) Typetallet = _____
- c) Mindsteværdi = _____
- d) Størsteværdi = _____
- e) Variationsbredden = _____
- f) Medianen = _____

NB: Vi bemærker at medianen og gennemsnittet ikke behøver at være det samme. Talsættet kan være meget spredt eller samlet. F.eks. kan man have mange karakterer i den lave ende og i den høje ende men ende på et gennemsnit på 7 (selvom man ikke har fået den karakter overhoved)

Facit: 1 2 7 8,79 8,96 10 10 11 12 14

Hyppighed:

Hyppigheden er hvor mange gange hver observation forekommer i observationssættet. Den betegnes ofte med $h(x)$, hvilket vil sige at hyppigheden er en slags funktion som kendes fra ligninger f.eks. $f(x) = 2x + 3$. Lad os se på hvordan hyppigheden er i vores eksempel fra klassen:

Alder	Hyppighed $h(x)$
15	5
16	10
17	7
18	2
19	1

Opgave 8: Find hyppigheden for klassens data

- a) Find hyppigheden af klassens skostørrelser?

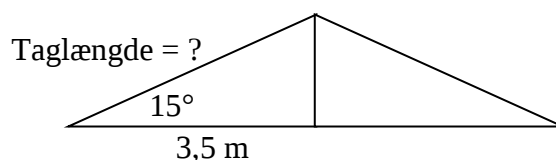
45 38 44 42 43 38 45 40 40 43 37 46 45 41 39 44 42 38 36 44 44 37 42 44 38

Skostørrelse	Hyppighed $h(x)$
36	
37	
38	
39	
40	
41	
42	
43	
44	
45	
46	

- b) Find hyppigheden af klassens matematik prøve?

4 2 12 10 7 7 4 7 4 10 12 7 10 4 2 10 7 7 12 10 7 4 10 4 7

Karakter	Hyppighed $h(x)$
2	
4	
7	
10	
12	

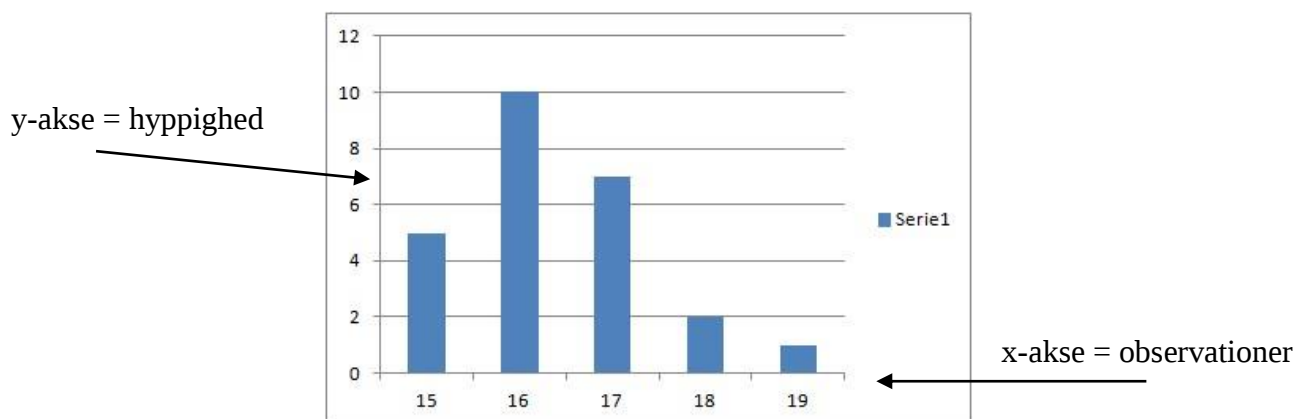
Ekstra Opgave 1: Beregn taglængden på taget tegnet nedenfor?

Facit: 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3,6 4 4,6 5 6 6 8

Pindediagram, stolpediagram og histogrammer:

I statistik er diagrammer en vigtig del af selve præsentationen af observationerne! Der findes mange forskellige former for diagrammer men nogle af de vigtigste er pinde-, stolpe og histogrammer som alle minder meget om hinanden.

Basalt set er det blot et koordinatsystem med en x og en y akse hvor observationerne er lagt ind i x-aksen og hyppigheden ud af y-aksen. Lad os se hvordan vores eksempel kommer til at se ud:

**Opgave 9:** Lav et histogram af hyppighederne fra forrige opgave

- a) Lav et histogram over klassens skostørrelser? (brug hyppighedstabel fra forrige opgave)



- b) Lav et histogram over klassens matematik prøve?



Summeret Hyppighed:

Den summerede hyppighed er hyppighederne lagt sammen med de foregående hyppigheder (vi husker jo at summen er resultatet af et addition/plus stykke). Den summerede hyppighed betegnes $H(x)$. Bemærk det store bogstav!! Lad os se på eksemplet da det forklarer det meget bedre

Alder	Hyppighed $h(x)$	Summeret Hyppighed $H(x)$
15	5	5
16	10	15
17	7	22
18	2	24
19	1	25

Opgave 10: Find den summerede hyppighed

- a) I en klasse bliver der foretaget en undersøgelse hvor hver elev skal tælle hvor mange blyanter, farveblyanter og tudser vedkommende har i sit penalhus. Det er der kommet følgende observationer ud af.

10 6 7 2 3 6 10 3 10 1 7 8 9 7 8 2 0 8 1 9 5 3 7 2 3 6 1 8 10 3

Find først hyppigheden af observationerne og derefter den summerede hyppighed?

	Hyppighed $h(x)$	Summeret Hyppighed $H(x)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

- b) På et hold på lægestudiet er der de studerende følgende alder:

22 22 21 20 21 20 18 19 19 20 19 21 19 22 21 19 21 23 20 19 18 19 21 20 18 19 20 21 23 22

Find først hyppigheden og derefter den summerede hyppighed?

	Hyppighed $h(x)$	Summeret Hyppighed $H(x)$
18		
19		
20		
21		
22		
23		

Facit: 1 3 4 7 11 12 12 13 16 17 20 24 24 26 28 30 30

Frekvens:

Frekvensen for en observation angiver hvor stor en del af alle observationerne en bestemt observation udgør. Frekvensen kan beregnes ved at tage hyppigheden for observationen og dividere med det samlede antal af observationer

$$\text{Frekvens} = \frac{\text{hyppighed}_\text{for}_\text{observation}}{\text{samlede}_\text{antal}_\text{observationer}}$$

Frekvensen betegnes $f(x)$ og kan enten opgives som en brøk, decimaltal eller en procentdel.

Lad os se på frekvensen i vores eksempel med klassens alder:

Alder	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$	$f(x)$ i %
15	5	$5/25 = 0,2$	20
16	10	$10/25 = 0,4$	40
17	7	$7/25 = 0,28$	28
18	2	$2/25 = 0,08$	8
19	1	$1/25 = 0,04$	4

Opgave 11: Find frekvensen af hyppighederne fra opgave 8

- a) Beregn frekvensen skostørrelserne fra opgave 8!

Skostørrelse	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		

- b) Beregn frekvensen af karaktererne fra opgave 8!

Karakter	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$
2		
4		
7		
10		
12		

Ekstra Opgave 2: Løs ligningen

$$\frac{x+7}{3} = 2x+1$$

Facit: 0,04 0,04 0,04 0,04 0,08 0,08 0,08 0,08 0,12 0,12 0,12 0,16 0,20 0,24 0,24 0,32 0,80

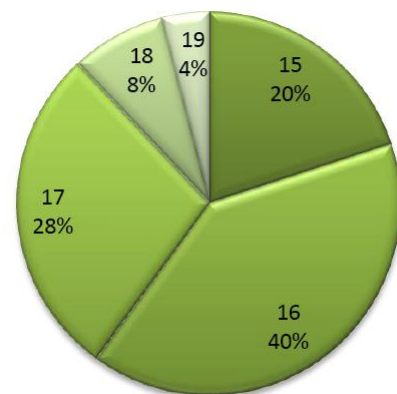
Cirkeldiagrammet & Frekvensen:

I et cirkeldiagram udgør hver observation et vist antal grader i cirklen. På denne måde kan man hurtigt få et visuelt overblik over hvilken observation der er flest af og hvilke der er færrest af. Når man har beregnet frekvensen er det nemt at omsætte den til grader i cirklen.

$$\text{Cirkeludsnit} = \text{frekvens} * 360^\circ$$

Lad os se på vores eksempel:

Alder	Hyppighed h(x)	Frekvens f(x)	cirkeludsnit
15	5	$5/25 = 0,2$	72
16	10	$10/25 = 0,4$	144
17	7	$7/25 = 0,28$	100,8
18	2	$2/25 = 0,08$	28,8
19	1	$1/25 = 0,04$	14,4
	25	1	360

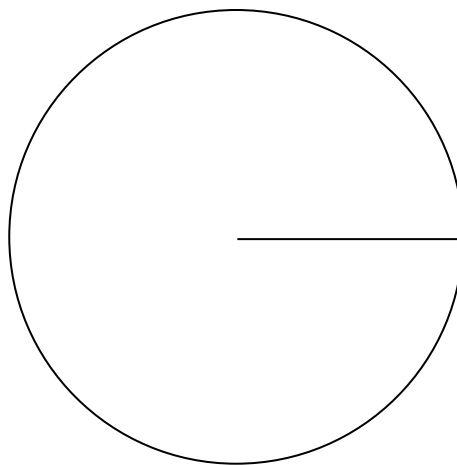


NB: Man skal selvfølgelig huske at antallet af grader lagt sammen skal give 360.

Opgave 12: Lav et cirkeldiagram ud af frekvenserne fra forrige opgave!

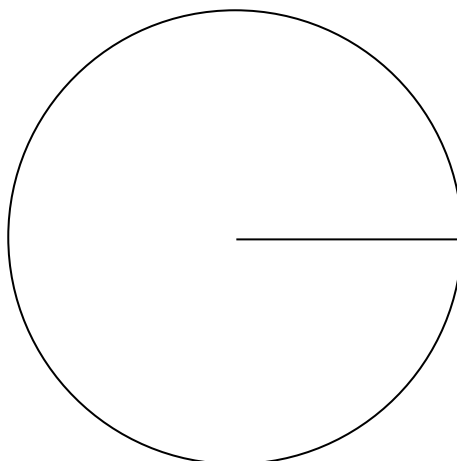
a) Lav et cirkeldiagram af frekvenserne over skostørrelserne fra forrige opgave!

	Frekvens f(x)	Udsnit
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
		360



b) Lav et cirkeldiagram af frekvenserne over karaktererne fra forrige opgave!

	Frekvens f(x)	Udsnit
2		
4		
7		
10		
12		
		360



Den summerede frekvens:

Den summerede frekvens er frekvensen lagt sammen med de foregående frekvenser. Den summerede frekvens betegnes $F(x)$. Bemærk det store bogstav!!

Lad os se på eksemplet da det forklarer det meget bedre

Alder	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$	Summeret Frekvens $F(x)$
15	5	0,2	0,2
16	10	0,4	0,6
17	7	0,28	0,88
18	2	0,08	0,96
19	1	0,04	1

Fordelen med den summerede frekvens er at man hurtigt kan se f.eks. hvor mange der er under 17 år i klassen nemlig 60 %!

Opgave 13: Beregn den summerede frekvens på frekvenserne fra forrige opgave!

- a) Beregn den summerede frekvens af skostørrelserne!

Skostørrelse	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$	Summeret Frekvens $F(x)$
36			
37			
38			
39			
40			
41			
42			
43			
44			
45			
46			

Hvor mange har mindre end størrelse 41 i sko? _____%

- b) Beregn den summerede frekvens af karaktererne!

Karakter	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$	Summeret Frekvens $F(x)$
2			
4			
7			
10			
12			

Hvor mange har fået mindre end 10 i karakter? _____%

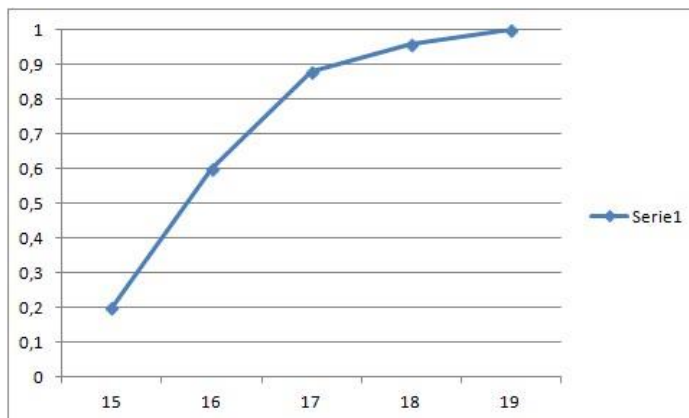
Facit: 0,04 0,08 0,12 0,28 0,32 0,32 0,40 0,44 0,56 0,64 0,64 0,84 0,88 0,96 1,0 1,0
40 % 64 % 90 %

Grafer & Kurver:

I nogle tilfælde er det mere praktisk og mere logisk at afbillede data som en kurve/graf. Det kan f.eks. være hvis man ønsker at afbillede/vise at der er en bestemt udvikling i tallene.

I grafen/kurven afsætter man tallene som punkter i et koordinatsystem, hvorefter de forbindes med rette linjer.

Den følgende graf/kurve afbilleder klassens summerede frekvens mht. alder fra forrige opgave. Man kan tydeligt se at aldersgrupperne 15, 16 og 17 år fylder mest i klassen da kurven er stejlest her!



Opgave 14: Afbillede den summerede frekvens du beregnede i forrige opgave som en kurve!

- a) Afbillede den summerede frekvensen af skostørrelserne beregnet i forrige opgave!



- b) Afbillede den summerede frekvensen af karakterne beregnet i forrige opgave!



Grupperede Observationer:

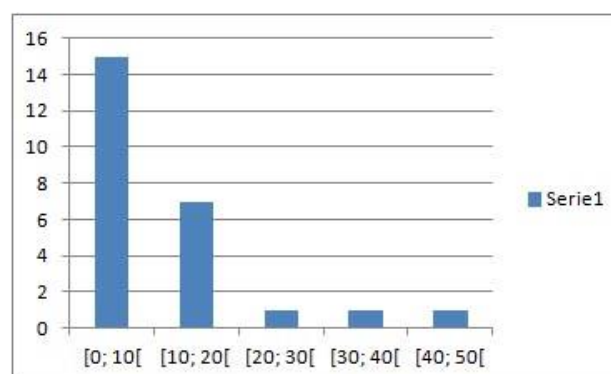
Statistik bygger jo på observationer altså tal og i de foregående opgaver har de været nemme at tælle og stille op! I eksemplet med skostørrelserne er der ingen der har en sko med størrelsen 44,46! Observationerne er alle sammen hele tal som er nemme at sortere. Anderledes ser det ud for antallet af fraværdsdage for klassen - se tabellen nedenunder:



Adam	2	Emilie	8	Juliane	30	Mikkel	0	Nikolaj	5
Amanda	0	Frederik	0	Lars	8	Mischa	8	Patricia	2
Artemis	10	Hans	12	Mads	2	Monika	45	Peter	10
Christian	22	Helen	15	Marie	9	Natascha	10	Tobias	16
Dan	8	Jonathan	6	Mathias	7	Niki	18	Tora	6

Hvis man skulle lave en hyppighedstabel over disse observationerne vil der blot være en observation ud for de fleste fraværdsdage, hvilket man ikke kan bruge til noget. Vi er med andre ord nød til at gruppere observationerne i intervaller så flere observationer tælles sammen. I eksemplet ovenfor vil det være praktisk at gruppere observationerne i intervaller på 10 som følger:

Fraværdsdage	Antal
[0; 10[	15
[10; 20[	7
[20; 30[	1
[30; 40[	1
[40; 50[	1



Angivelse af intervaller:

Ovenfor i tabellen benyttes nogle underlige kantede parenteser til at angive forskellige intervaller i fraværdsdage! I matematik er et interval alle tal imellem to tal f.eks. fra 0 til 10. Intervallet markeres med [eller med] også kaldt en klamme. Klammen kan enten vende væk fra tallet, hvilket betyder at tallet ikke er med i intervallet - eller klammen vender ind mod tallet hvilket betyder at tallet er med. Det giver mere mening ved at se på de 4 forskellige intervaller der kan være imellem 0 og 10:

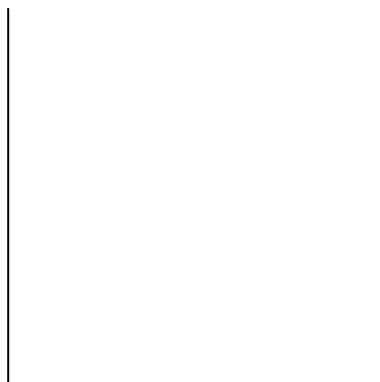
- $[0; 10]$ = lukket interval med alle tal fra 0 til 10 hvor 0 og 10 er med!
- $]0; 10]$ = halv åbent interval med alle tal fra 0 til 10 hvor 0 ikke er med mens 10 er med!
- $]0; 10[$ = åbent interval med alle tal fra 0 til 10 hvor 0 og 10 ikke er med!
- $[0; 10[$ = halv åbent interval med alle tal fra 0 til 10 hvor 0 er med men ikke 10

Opgave 15: Grupper observationerne i intervallerne og find hyppigheden

- a) Nedenfor ses antallet af sendte sms'er klassen sender. Grupper observationerne i intervaller på 10 og tegn et histogram/stolpediagram

2 10 6 2 8 20 15 20 25 6 30 18 10 28 8 8 12 4 35 12 3 16 8 22 12

Sms'er	Antal
[0; 10[	
[10; 20[	
[20; 30[	
[30; 40[	



- b) Nedenfor ses elevernes højder i klassen. Grupper observationerne i intervaller på 10 og tegn et graf.

185 170 165 175 190 168 186 175 155 195 158 180 185 165 178 188 190 175 175 180 182
170 185 195 170

Højder cm	Antal
[150; 160[	
[160; 170[	
[170; 180[	
[180; 190[	
[190; 200[	



- c) Grupper de tilfældige tal nedenfor i passende lige store intervaller (**NB:** findes ikke i facit):

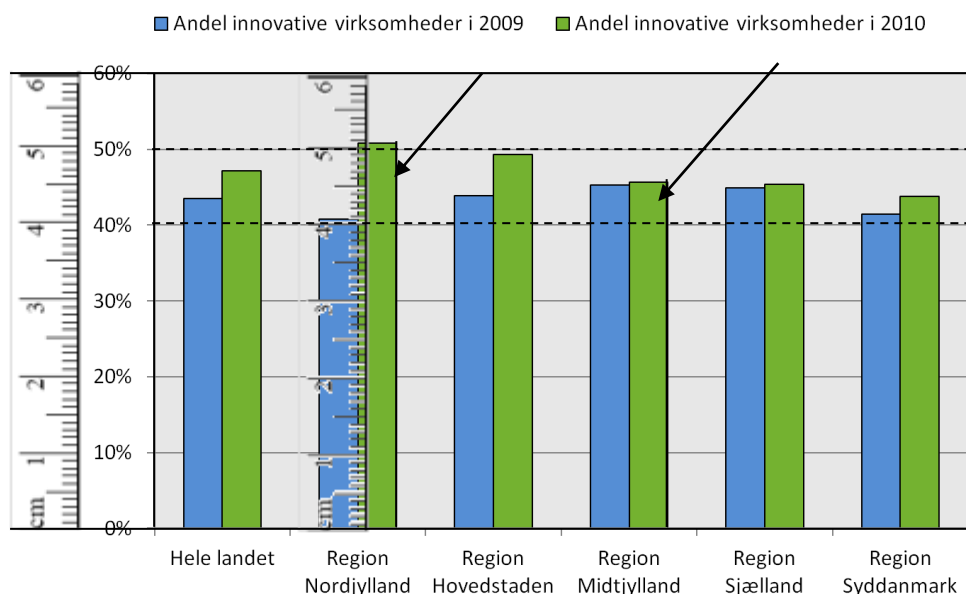
45 12 29 28 8 18 22 46 31 35 49 22 36 1 47 15 46 47 41 24 5

Interval	Hyppighed	Interval	Hyppighed

Facit: 0 2 2 3 4 5 7 8 8 8 10 13

Aflæsning af Diagrammer:

I de foregående opgaver har vi lavet diagrammer ud fra statistisk talmateriale. Dog er det ikke så ofte i hverdagen at man skal lave sine egne grafer men derimod vil man ofte blive mødt af diagrammer man skal kunne aflæse. Et sådan diagram kunne være det følgende:



Hurtig aflæsning med øjet:

Under normale omstændigheder vil man lave en hurtig aflæsning der beror på ens øjemål. Det vil man ofte skulle i en færdighedsregning! Hvis man f.eks. skal aflæse følgende (den pilen peger på):

- *Region Nordjyllands*: ca. 51 % fordi den er lidt over 50 %
- *Region Midtjylland*: ca. 45 % fordi den er midt mellem 40 og 50 %

Dette er dog ikke altid nøjagtig nok f.eks. hvis man skal benytte resultatet til at regne videre med!

Nøjagtigaflæsning med lineal:

Diagrammet er i virkeligheden en slags målestokstegning der er tegnet i et bestemt forhold. Dette forhold kan man finde ved at måle hele y-aksens længde og derefter finde ud af hvad 1 cm svarer til i diagrammet! Dvs. at der må gælde følgende for diagrammet:

6 cm = 60 % (se linealen indlagt i billedet).

$$1 \text{ cm} = \frac{60}{6} = 10 \%$$

Nu kan man nøjagtig aflæse de to regioner ved brug af vores lineal og forholdet der er 1:10:

- *Region Nordjyllands*: 5,1 cm (aflæst med lineal) * 10 % = 51 %
- *Region Midtjylland*: 4,6 cm (aflæst med lineal) * 10 % = 46 %

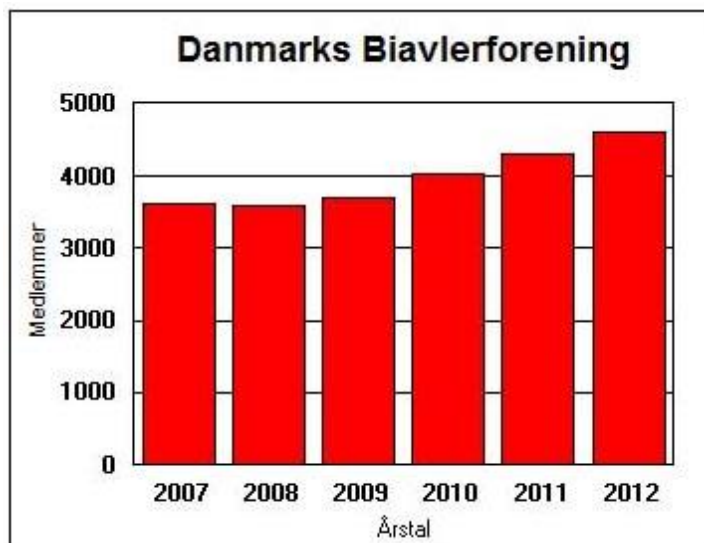
Opgave 16: Aflæs biavler-diagrammet! Find først forholdet diagrammet over Danmarks

Biavlerforening er lavet i:

$$\text{Forhold} = \frac{5000}{\text{cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

a) Bestem hvor mange biavlere der er i

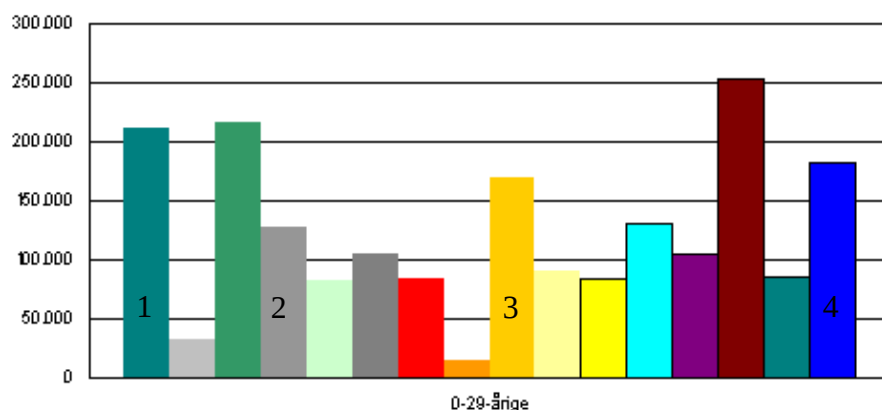
- 2012 =
- 2010 =
- 2009 =
- 2007 =

**Opgave 17:** Aflæs diagrammet over unge og afrund resultatet til helt antal 1000'er!

Find forholdet:

a) Bestem søjle nr:

- 1 =
- 2 =
- 3 =
- 4 =

**Opgave 18:** Diagrammet viser hvor stor en %del af de besøgte hjemmesider i 2011 der henholdsvis besøgte af iphone (øverst) og android (nederst).

Find forholdet

Forholdet =

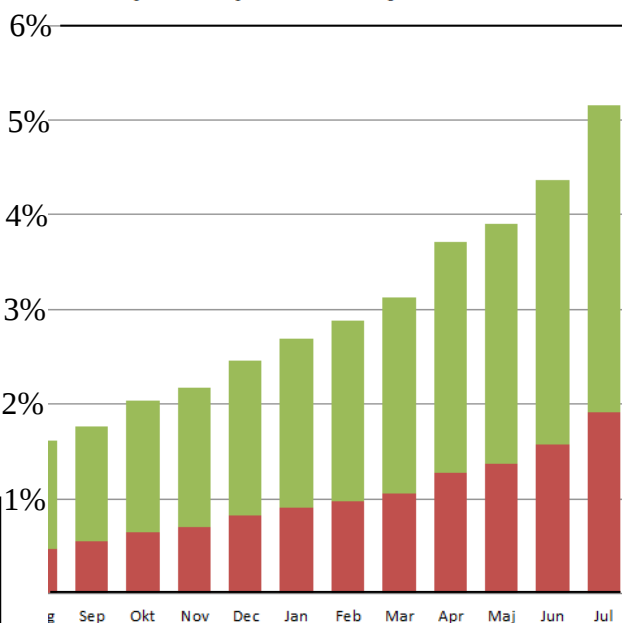
a) Bestem %del besøg for Android i:

- Okt =
- Jul =

b) Bestem %del besøg fra iphone i:

- Okt =
- Jul =

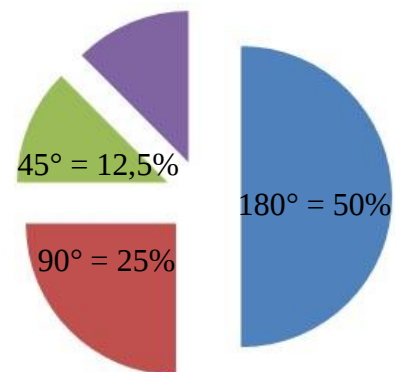
Smartphones på danske hjemmesider



Facit: 0,3 0,6 1,4 1,9 2,4 3,2 3.400 3.600
3.700 4.020 4.660 130.000 165.000
170.000 183.000 215.000 321.000

Hurtig Aflæsning af Cirkeldiagrammer:

Man kan hurtigt vurdere størrelsen af et område ud fra ens kendskab til hvor stort et 50 %, 25 % og 12,5 % stykke er (se figur).

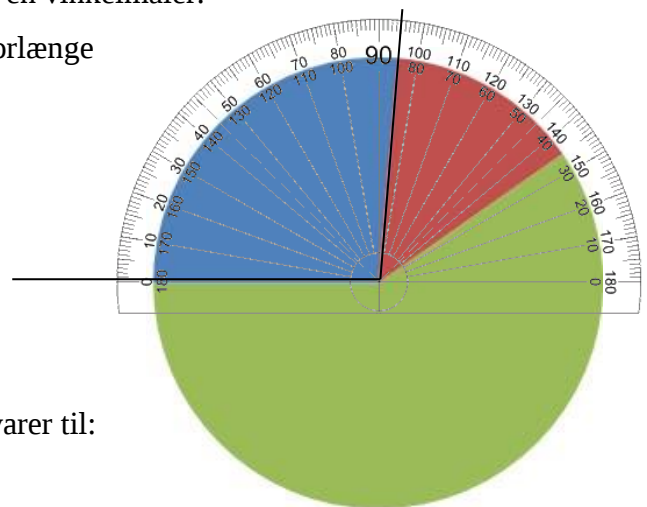


Nøjagtig aflæsning af Cirkeldiagram:

Cirkeldiagrammet er 360° hele cirklen rundt som svarer til 100 %.

Cirklen er inddelt i lagkage/pizzastykker der hver er på et bestemt antal grader der så igen svarer til en bestemt procent! Når man derfor skal aflæse et cirkeldiagram er man derfor nød til, at måle hvert stykke i cirklen med en vinkelmåler.

For at aflæse vinklen nøjagtig er man ofte nød til at forlænge siderne i stykkerne som vist på figuren!



Beregning: For cirklen må gælde at:

$$100 \% = 360^\circ \text{ hvor det så må gælde at}$$

$$1 \% = \frac{360}{100} = 3,6^\circ$$

Vi ser at stykket på figuren svarer til 95° dvs at det svarer til:

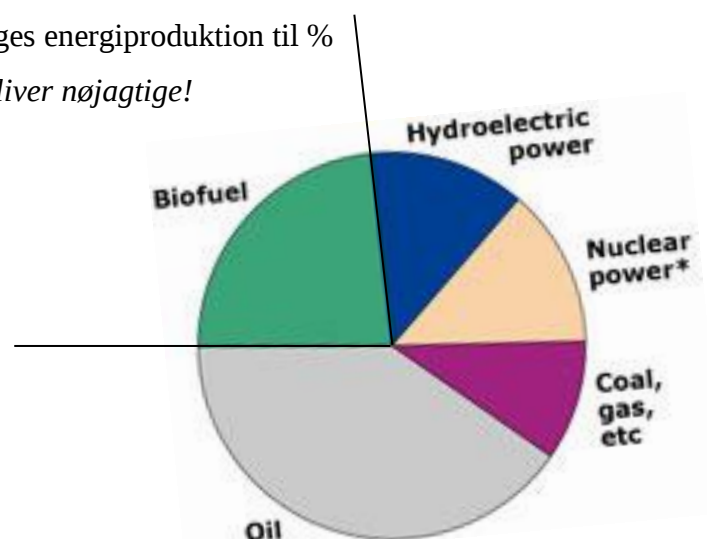
$$\% = \frac{95}{3,6} = 26,4 \%$$

Sådan fortsætter man med at måle de andre stykker! Her skal man være opmærksom på at *alle stykker lagt sammen skal give 360° og alle procenter lagt sammen skal give 100 %!*

Opgave 19: Omregn cirkeldiagrammet over Sveriges energiproduktion til %

Husk at forlænge linjerne, som vist, så vinklerne bliver nøjagtige!

	Grader		%
Biofuel		$\frac{\quad}{3,6} =$	
HydroPower			
Nuclear			
Coal, Gas			
Olie			
	360 °		100 %



Facit: 7 10 13 13 16 24 36 40 44 48 48 84 95 144 152

Statistik & undersøgelser:

Når man laver større undersøgelser som f.eks. Exit Polls (meningsmålinger), videnskabelige forsøg (eks. afprøvning af medicin), projektopgaven i 9 klasse osv. er det ikke ligegyldigt hvordan undersøgelsen er foretaget. Her er der specielt to ting man skal være opmærksom på:

- **Antallet:** *Hvor mange er med i undersøgelsen?* Det siger sig selv, at hvis man kun har spurgt 25 mennesker ”*hvem de ville stemme på*”, giver det ikke et særligt godt billede, af hvordan alle stemmer i hele landet! I større undersøgelser skal man op på, at *have 1000 deltagere før det er sigende.*
- **Tilfældighed:** Deltagerne skal være tilfældigt udvalgt og repræsentere et bredt udsnit af befolkningen. Hvis man f.eks. laver en meningsmåling om *krigen i Irak* i en Matas butik vil denne undersøgelse blive farvet af de mennesker som handler der! Blandt dem vil der formodentlig være en overvægt af kvinder som vil have en tendens til at være mere imod krig end mænd. Derimod hvis man gik i Bauhaus og lavede undersøgelsen ville der her formodentlig være en overvægt af mænd og disse ville have en tendens at være for krig!

Opgave 20: Et eksempel på hvad man ikke skal gøre

Før præsidentvalget i USA i 1936 foretog bladet *Literary Digest* historiens største meningsmåling. De sendte et spørgeskema ud til 10 mio. borgere tilfældigt udvalgt ud fra *bladets abonnenter, telefonbøger og bilejere*. De fik 2,3 mio svar som pegede på at republikanerne ville vinde stort! Da dagen oprandt, vandt den demokratiske kandidat *Roosevelt med historiens største valgsejr!*

Prøv at forklar hvad de havde gjort galt: _____

Ekstra opgave 3: Lav din egen undersøgelse og stil det op i et diagram af eget valg. Det kunne f.eks. være alder i klassen, højde, transporttid til skole, løn i fritidsjob osv.

Statistik & Objektivitet:

Statistik fremlægges ofte i medierne som en slags objektiv sandhed uden subjektive/personlige holdninger. Men *vi mennesker hører og ser ofte det vi gerne vil høre og se* som passer ind i vores opfattelse af verden. Denne uheldige egenskab kan ubevidst påvirke undersøgelserne således, at vi uvidende kommer til at påvirke dem så de ikke længere er objektive. Dette er sket ofte for selv grundige videnskabelige undersøgelser!

At være kritisk:

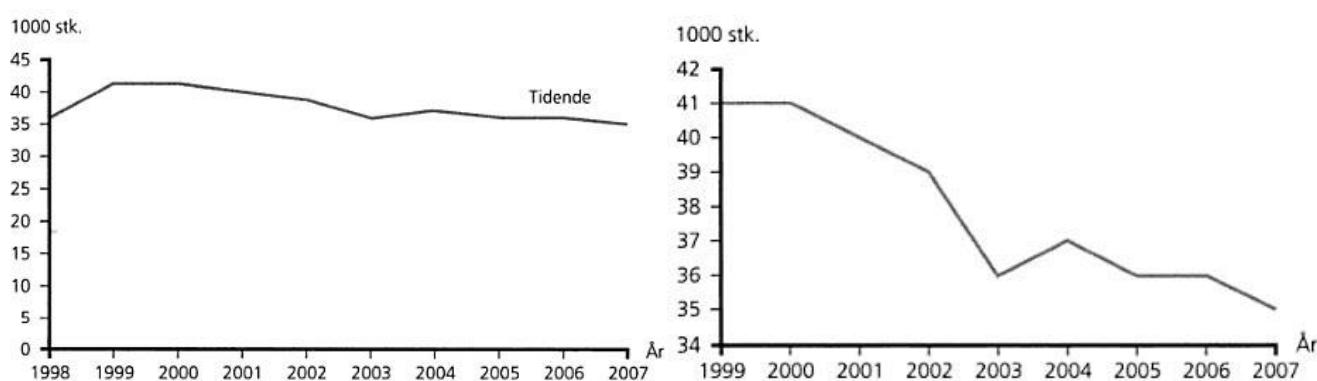
I de senere år er statistik oftere og oftere også blevet benyttet i politiske sammenhænge. Her er det uhyre vigtig som kritisk demokratisk borgere, at være på vagt da denne form for statistik kan være fremstillet for netop at understøtte en bestemt politisk holdning. Nogen vil måske sige, at man kan kalde det manipulation, og her er det uhyggeligt vigtig for demokratiet at borgerne er kritiske og er i stand til at stille de nødvendige kritiske spørgsmål:

- *Hvordan er undersøgelsen lavet?* (hvor mange er med i undersøgelsen?)
- *Hvem har lavet undersøgelsen?* (cepos = højrefløj, kraka = venstrefløj tænketank)
- *Hvilke kriterier dækker begreberne over?* (hvornår er man arbejdsløs, hvornår er man ung)

Man bør altså være opmærksom på, at *man kan bruge statistik men man kan også misbruge statistik* og vride og tilpasse den til sine egne behov!

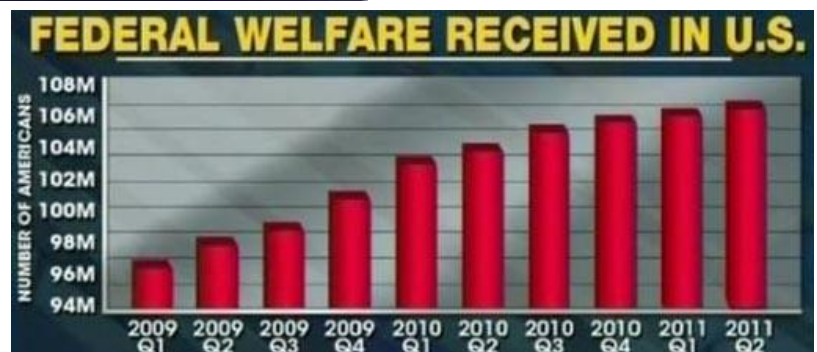
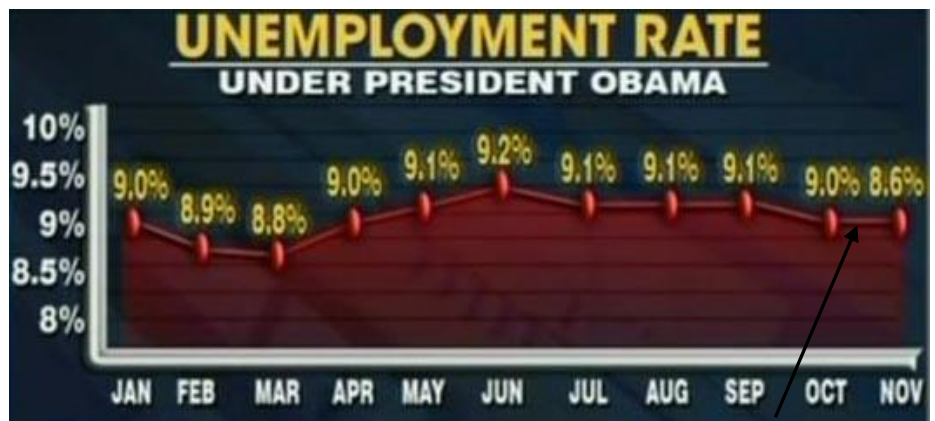
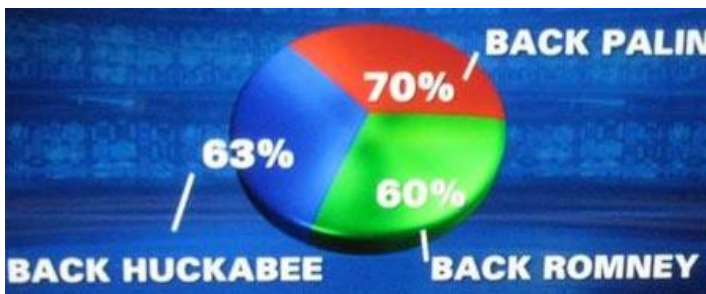
Manipulation med statistik:

De to grafer nedenfor er et klassisk eksempel på hvordan statistik kan blive manipuleret så det viser forskellige ting. De to grafer nedenfor viser begge udviklingen i en avis' oplag gennem tiden. De to grafer afbilleder altså de samme tal men fortæller to forskellige historier! *Kan du se hvad man har gjort?*



Korrekt, man har ændret y-aksens inddeling så faldet bliver mere markant end ellers!

Opgave 21: Følgende billeder er hentet fra FOX news i USA under valgkampen i 2011/12. Find ud af hvordan man har manipuleret med statistikken?



Ekstra Opgave 4: En mand sætter 250.000 kr i banken til en rente på 2,8 % p.a. Hvor mange penge står der på kontoen efter 5 år?

Facit: 250.000 287.016 320.596 1.250.000

Median & Gennemsnit siger ikke alt:

Som det ses på de forrige sider, kan statistik være et redskab til manipulation, men det kan også blive brugt til konstruktivt til at fortælle noget om virkeligheden. Tallene skal bruges til noget - så lad os se på hvordan man kan analysere følgende to 1g klassers (1x, 1y) karakterer i matematik:

1x	02	02	4	4	4	4	7	7	7	7	7	7	7	7	10	10	10	10	12	12
1y	02	02	02	02	02	02	4	4	4	7	10	10	10	10	12	12	12	12	12	12

Umiddelbart ser de to klassers karakterer meget forskellige ud. 1x har mange af deres karakterer samlet omkring midten (karakter 7), hvorimod 1y har spredt karaktererne i bunden og toppen! Men lad os se hvad vores statistiske variable kan fortælle noget om forskellen mellem dem:

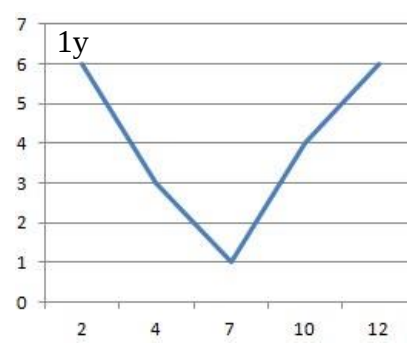
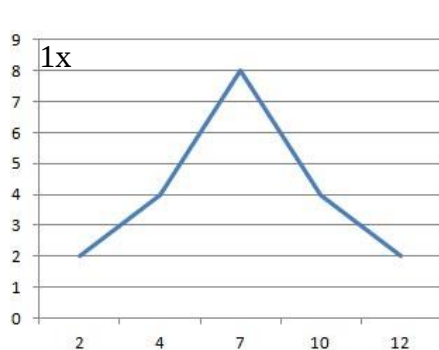
	1x	1y
Gennemsnit	7	7,15
Median	7	7 (eller 8,5)
Mindste værdi	02	02
Største værdi	12	12

De to klasser virker uhyggelig ens når vi beregner de statistiske variable vi i det tidligere har lært at beregne! *Dette tilfælde viser meget klart at gennemsnittet og medianen ikke behøver at fortælle noget om de faktiske forhold.*

Symmetrier i Diagrammer:

Lad os i stedet se om hyppigheden og et diagram kan fortælle mere om forholdene i 1x og 1y:

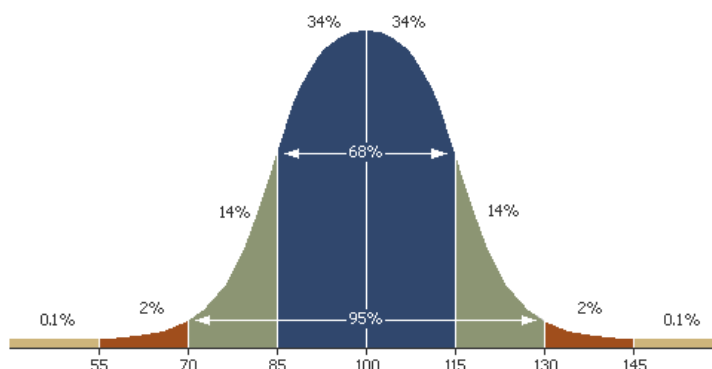
1y		1x (antal)	1y
	02	2	6
	4	4	3
	7	8	1
	10	4	4
	12	2	6



Opgave 22: Beskriv forskellene imellem de klasser ved at bruge diagrammerne?

Normalfordelingen:

I 1x diagram ser man at de fleste karakterer samler sig omkring midten og bliver færre jo længere man kommer mod yderpunkterne! Når diagrammet danner en sådan "klokkeform" kalder man det for en "Normalfordeling". Normalfordelingen kan man finde mange steder ikke kun i matematik & statistik men også i naturen og videnskaben.

Normalfordelingen for intelligens (IQ)

Når undervisningsministeriet laver afgangsprøver i 9 klasse tilstræbes det at karaktererne skal danne en normalfordeling. Dvs. flertallet af elever skal have 7 og det er dette karakterskalaen lægges efter! Dette er værd at huske hvis man bliver ærlig over at få et 7 tal - så er man jo bare som flertallet!

Skævhed & Symmetri:

Nogen gange kan danner statistikken ikke helt symmetriske normalfordelinger. Ofte vil fordelingen være skæv dvs. at målingerne hælder til den ene eller den anden side!

Opgave 23: Nedenfor ses 2 færdighedsprøver lavet af 2 forskellige 9 klasser. Lav en hyppighedstabel og afbillede de 2 prøver som et diagram. Sammenlign og analyser herefter klassernes prøver.

Prøve 1	7	4	4	7	10	7	7	10	7	7	7	4	7	7	7	12	10	7	10	10	7	10	7	7
Prøve 2	7	4	7	10	7	7	10	7	10	7	10	10	12	7	10	7	12	12	4	10	10	10	10	-

	Prøve 1	Prøve 2
02		
4		
7		
10		
12		

Boksplot & Sammenlignede statistik:

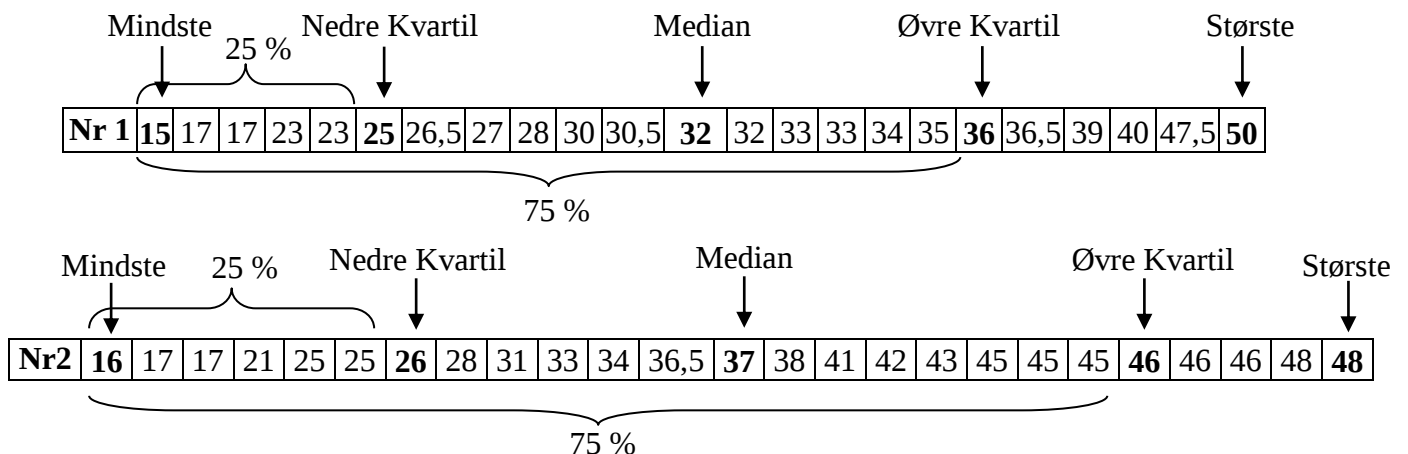
Når man skal sammenligne statistisk talmateriale kan man også anvende et boksplot. For at lave et boksplot skal man bruge følgende:

- **Mindste & Største værdien:**
- **Medianen:** Det tal der står i midten af den ordnede talrække
- **Nedre Kvartil:** det tal hvor 25 % af tallene står under!
- **Øvre Kvartil:** det tal hvor 75 % af tallene står under.



I det følgende skal vi se hvordan man kan lave et boksplot over 2 færdighedsprøver lavet af den samme klasse i starten af 8 og til afgangseksamen!

Nedre & Øvre kvartil: I den første prøve er der 23 så dvs. nedre kvartil bliver $23 * \frac{1}{4} = 5,75 \approx 6$ plads og øvre kvartil bliver $23 * \frac{3}{4} = 17,25 \approx 18$ plads (Egentlig burde det være et gennemsnit imellem plads nr 17 og 18 (altså $(36+36,5)/2=36,25$)!

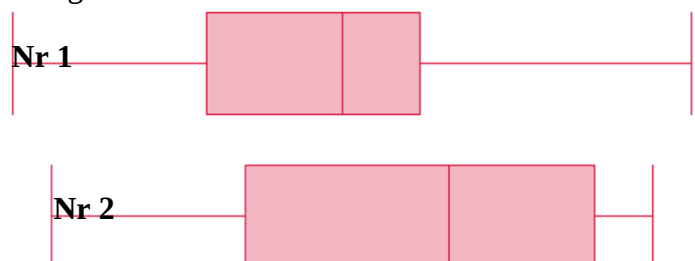


Tegning af Boksplot:

- Tegn en tallinje med passende interval der matcher tallene.
- Sæt en lodret streg udfor mindst, nedre kvartil, medianen, øvre kvartil og største på tallinjen!
- Tegn en streg igennem
- Forbind Nedre og Øvre kvartil med en streg så de danner en kasse!

Vurdering:

I prøve nr 2 er der mindre spredning og pointene er højere end i nr 1. Boksplottet viser ganske tydeligt at eleverne er blevet bedre fra 8 til 9 klasse!



Opgave 24: Lav et boksplot over de to problemregnings prøver og sammenlign dem!

Prøve nr 1 er en 8 klasses årsprøve i problemregning mens nr 2 er den samme klasses 9 klasse afgangsprøve!

Nr 1	8	16	29	32	43	45	51	51	55	57	57	58	59	64	65	71	84	87	89	96	98	99	
Nr 2	38	43	44	51	53	55	57	58	61	61	62	64	66	69	69	71	72	81	81	84	87	90	93

	Nr 1	Nr 2
Mindste Værdi		
Nedre Kvartil		
Median		
Øvre Kvartil		
Største Værdi		



Boksplot i Geogebra

Vurdering:

Ekstra Opgave 5: En kugle har radiussen 5 meter. Hvor mange m³ fulder den?

Facit: 2 8 38 42 45 55 57 60 64 73 81 84 93 99 481 505 524

Opgave 25: Sammenlign de to klassers fraværs lektioner med boksplot og afslut med en samlet vurdering af fraværet i de to klasser!

Du skal huske først at sætte fraværs lektionerne i orden med mindste først!

Klasse1	86	93	80	58	154	57	152	51	20	111,5	69	180	123,5	98	167	48,5	119	116	24	21,5
Klasse2	130	157	26	71	137	31,5	64	36	44	33	96	81	133	13,5	0	93	146,5	83	33	131,5

Klasse1																				
Klasse2																				

	Klasse 1	Klasse 2
Mindste Værdi		
Nedre Kvartil		
Median		
Øvre Kvartil		
Største Værdi		

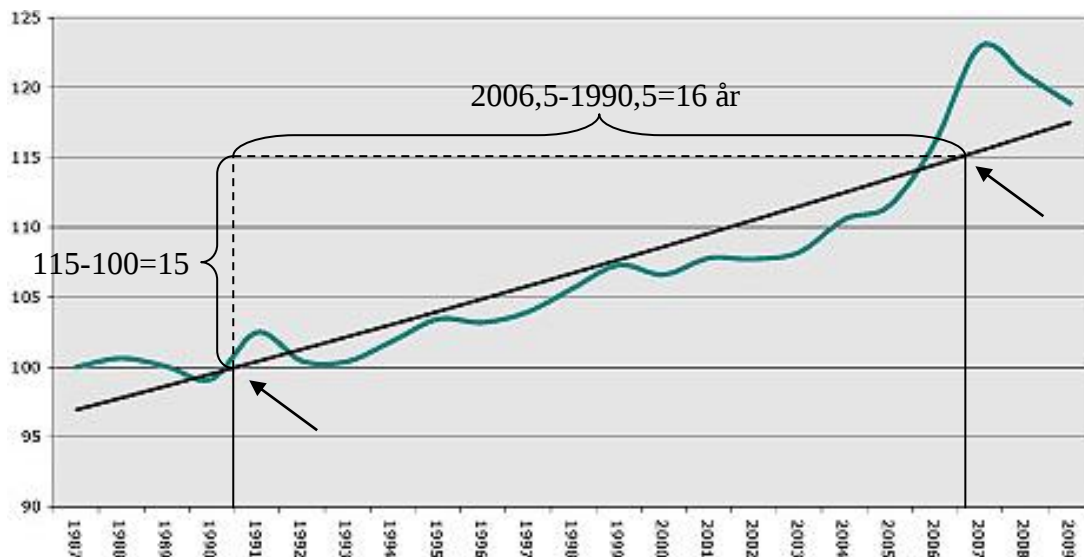
Vurdering:

Ekstra Opgave 6: Et popcorn kræmmerhus har form som en kegle med radius 9 cm og en højde på 28 cm. Hvor mange cm³ indeholder kræmmerhuset?

Facit: 20 33 57 71 86 123,5 131,5 157 180 2.375 2.902

Statistik og Udvikling (Lineær Regression):

Statistik bliver ikke kun benyttet til at analysere virkeligheden den kan også fortælle os noget om den fremtidige udvikling. Med andre ord kan man bruge statistik til sandsynlighedsregning! I grafen nedenunder ses en tilsyneladende ujævn kurve. Dog ses det, at kurven stiger jævnt og at man med lidt god vilje kan lægge en ret linje ind oven på grafen. Denne rette linje kan man bruge til at forudsige den fremtidige udvikling hvis vi antager, at udviklingen der er nu forsætter i fremtiden!!



Beregning af linjens hældning:

Den rette linje har en bestemt hældning der angiver *hvor meget den stiger pr år!* Hvis man kender denne hældning kan man også beregne hvordan udviklingen vil være år ude i fremtiden!

For at kunne beregne hældningen er det nødvendigt med to punkter på linjen der er nemme at aflæse. De to punkter må også godt være placeret langt fra hinanden! På grafen er 2 punkter udvalgt og markeret med pile! Hældningen kan herefter beregnes ved:

$$\text{Hældning} = \frac{\text{Forskellen På Y - Aksen}}{\text{Forskellen På X - Aksen}} = \frac{115 - 100}{2006,5 - 1990,5} = 0,94$$

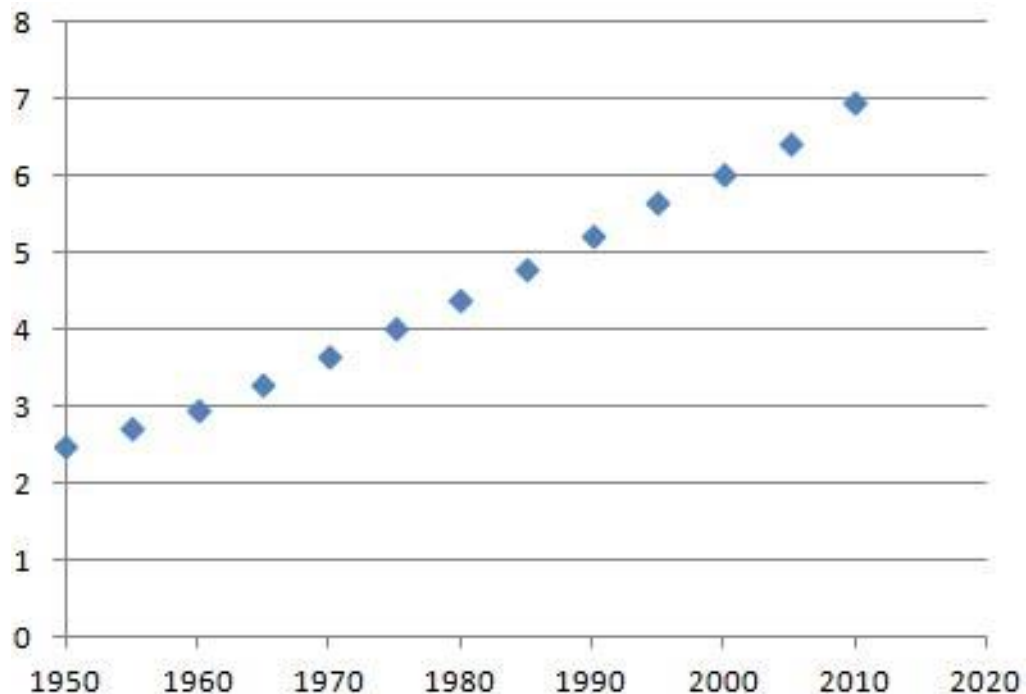
Hvis man antager at der i 2006 er ca. 115 kan vi ud fra dette punkt udregne hvor mange der må være i 2020. Det er (2020-2006) 14 år ud i fremtiden og derfor må der til den tid være:

$$2020 = 0,94 * 14 + 115 \approx 128$$

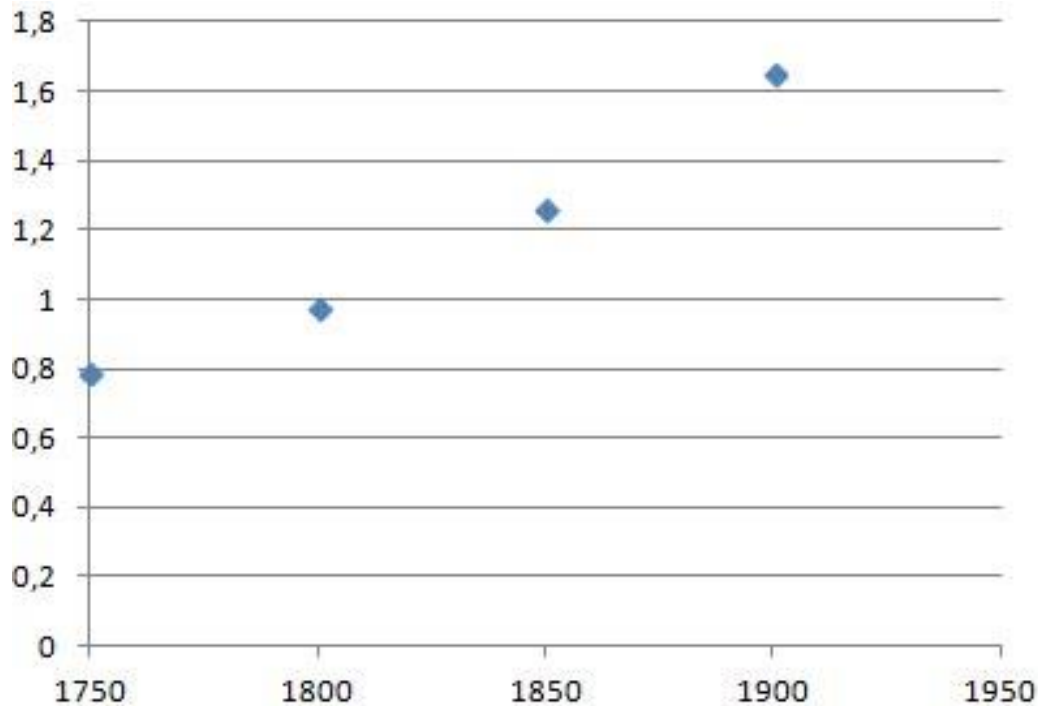
Man skal altid huske at dette tal forudsætter at udviklingen forsætter i fremtiden - som ingen jo kender! Man kunne også have gjort dette ved blot at forlænge den rette linje videre!

Opgave 26: Verdens befolkning har udviklet sig meget i de sidste 200 år! Beregn verdensbefolkning i 2100 ud fra den statistiske udvikling fra 1950 til 2010?

(y-aksen er opgivet i milliarder af mennesker!)



Ekstra Opgave 7: Beregn verdensbefolkning i 2100 ud fra den statistiske udvikling fra 1750 til 1950?



Facit: 1,2 2,3 8 14 20

Opgave 27: Løs færdighedsopgaverne

En klasse får karaktererne:

8 9 03 7 5 5 9 10 8 8 8 6 11 10 9 9 7 7 7 8

- 1) Typetallet = _____
- 2) Størsteværdien = _____
- 3) Medianen = _____

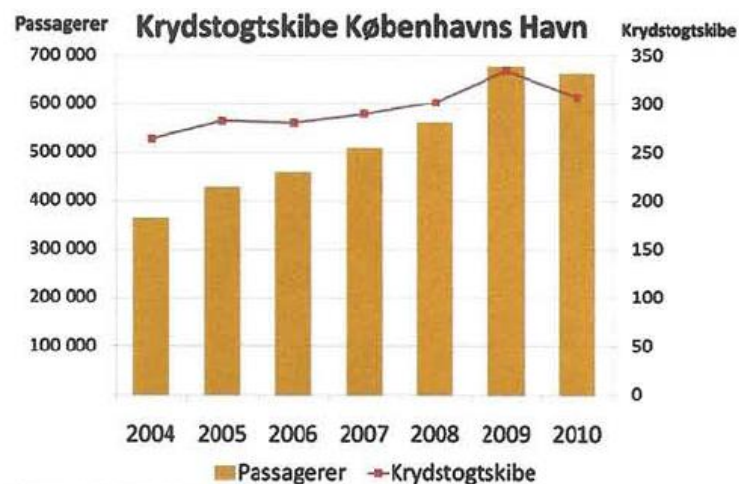
Alderen på 10 personer:

20 19 20 21 22 19 20 26 23 20

- 4) Gennemsnittet = _____
- 5) Typetallet = _____
- 6) Medianen = _____
- 7) Variationsbredden = _____

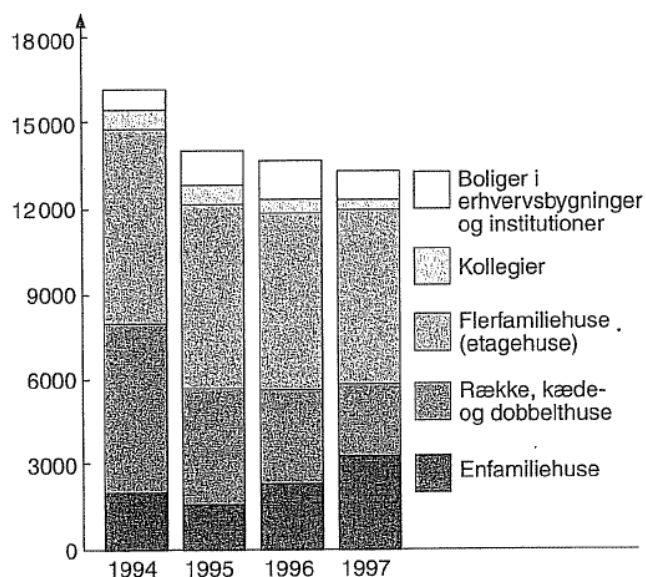
x	h(x)	f(x)
-3	0	0
00	0	0
02	1	5
4	2	10
7	8	38
10	6	29
12	4	19

- 8) Størsteværdien = _____
- 9) Typetallet = _____
- 10) Medianen = _____



- 11) Den største årlige stigning i antallet af krydstogtskibe er fra år _____ til år _____

- 12) Stigningen af antallet af passagere fra 2008 til 2009 er _____



- 13) Hvor mange boliger blev der fuldført i 1995? _____
- 14) Fra 1995 til 1997 falder antallet af fuldførte boliger _____

Facit: 3 7 7 7 8 8 11 12 20 20 21 600 750 1.400 2000 2008 2009 95.000 120.000 125.000

Mundtlig Matematik: Familien Genbrug (Ekstra Opgave)

Danmark har indført affaldssortering og på baggrund af dette er en familie (2 voksne & 2 børn) blevet udvalgt som test gruppe! De har vejet alt affald i en uge og sorteret det i 3 grupper Metal, Plastik & Glas! Det er der kommet følgende tabel ud af:

plastik	84 g	Plastik	13 g	Metal	6 g	Metal	7 g	Glas	217 g
plastik	84 g	Metal	62 g	Plastik	70 g	Metal	11 g	Metal	8g
plastik	84 g	Plastik	11 g	Plastik	15 g	Plastik	8 g	Metal	61 g
plastik	84 g	Metal	56 g	Plastik	21 g	Metal	55 g	Plastik	7g
Metal	29 g	Metal	60 g	Metal	41 g	Plastik	11,5 g	Plastik	10 g
Plastik	21 g	Glas	155 g	Plastik	1,5 g	Metal	25 g	Plastik	19 g
Metal	91 g	Metal	6 g	Plastik	25 g	Glas	119 g	Plastik	16 g
Plastik	7 g	Glas	101 g	Glas	190 g	Metal	5 g	Plastik	31 g
Metal	28 g	Plastik	22 g	Plastik	6 g	Plastik	13 g	Plastik	6g
Plastik	48,5 g	Plastik	30 g	Plastik	28 g	Plastik	19 g	Metal	8 g

Fakta om Genbrug:

- Der bruges 2 kg olie på at producere 1 kg plast!
- Prisen for 1 ton bunkerolie er 683 \$ (USD).
- Kursen på dollars er 580.
- Der bruges 143.000 tons plast om året i husholdningerne i Danmark.
- Kun 4 % af denne plast genbruges!
- Prisen på skrotjern er 0,7 kr/kg
- Prisen på knust glas er 380 kr/ton

Spørgsmål: Du skal ud fra familiens genbrug give et bud på hvad man kan forvente der bliver genbrug på landsplan. I den forbindelse kan du komme ind på følgende

- Lave statistik analyse af genbrugsgrupperne Plastik, Metal & Glas (f.eks. boxplot)
- Anslå hvor meget familien kan genbruge på et år?
- Anslå hvor meget der kan spares ved deres genbrug på et pr?
- Give et bud på hvor stort et genbrug man kan forvente på landsplan?

Vedlæg din besvarelse på et papir til opgaven!